INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

Introd_calc_Integral_2011.indd 1 30/03/2011 07:43:10

Márcia Maria Fusaro Pinto

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

Belo Horizonte
Editora UFMG
2009

Introd_calc_Integral_2011.indd 3 30/03/2011 07:43:11

Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro deles se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas, foi elaborada uma autoavaliação com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. A autoavaliação auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, ele deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância
UFMG

Introd_calc_Integral_2011.indd 5 30/03/2011 07:43:11

Sumário

Introd_calc_Integral_2011.indd 8 30/03/2011 07:43:11

Apresentação

Neste livro, damos continuidade ao conteúdo apresentado em *Introdução ao Cálculo Diferencial*. Nele iniciamos uma discussão sobre variação e taxas de variação de funções reais de variáveis reais, estudando em seguida as ideias e técnicas para encontrar derivadas, que compõem a área do conhecimento conhecida como Cálculo Diferencial.

Aqui vamos desenvolver estratégias para recuperarmos informações sobre uma quantidade expressa por uma função no caso de conhecermos a sua taxa de variação instantânea, ou seja, sua derivada. Estabelecemos também uma relação importante entre o cálculo de derivadas e determinação de retas tangentes e o cálculo de áreas e volumes, introduzindo o conceito de integral. Esta relação é central ao desenvolvimento da área de conhecimento que chamamos de Cálculo Diferencial e Integral.

Do mesmo modo que naquele primeiro livro, escrevo este texto para ser utilizado em disciplina do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG – na modalidade a distância. Mantive a opção por não me restringir à linguagem matemática formal, atenta ao rigor nas definições matemáticas e construção dos argumentos ao justificar proposições e teoremas. Embora o texto fique longo por não ter feito uso do poder de síntese da linguagem matemática, a decisão foi mantida por acreditar que a introdução precoce de uma linguagem puramente técnica pode resultar numa ênfase em manipulação puramente simbólica, em detrimento das discussões conceituais que queremos proporcionar aos alunos.

Mantive também a proposta de desenvolver o texto a partir de exemplos, seguidos da sistematização dos resultados. Busquei representar as noções por meios visuais, propondo ao leitor explorar e produzir suas próprias representações dos conceitos. Como no outro texto, há exemplos de situações do nosso dia a dia e em outras ciências, que são modelados matematicamente. Partindo destes exemplos e de suas diferentes representações, relações são estabelecidas e os conceitos matemáticos são construídos, enfatizando no texto o estudo destes últimos.

Desse modo, a estrutura deste texto mantém o mesmo movimento de partir de experiências e de modelagem de fenômenos no sentido de uma teorização. Na primeira aula, retomo as noções de *taxa de variação instantânea e derivada* já estudadas e defino as noções de *variação acumulada* e de *variação total*. Em seguida, apresento o conceito de *Integral Definida*, relacionando-o às noções anteriores e ao cálculo de áreas de figuras planas.

Introd_calc_Integral_2011.indd 11 30/03/2011 07:43:11

O Teorema Fundamental do Cálculo, apresentado na terceira aula, estabelece uma relação entre derivadas e integrais, e dá indicações sobre as técnicas que devem ser desenvolvidas para resolver com maior agilidade os problemas que podem ser respondidos por meio daquelas últimas.

Técnicas de Integração são exploradas nas quatro aulas subsequentes, como instrumentos para estabelecermos o valor das *Integrais Definidas*. A partir de então, ocupamo-nos com algumas aplicações dos conceitos introduzidos, tais como cálculo de áreas entre curvas e volumes de revolução.

Encerramos o texto estendendo o conceito de integral, incluindo o estudo de funções que nas aulas iniciais não eram consideradas. Esta última aula foi escrita por Grey Ercole, coautor do primeiro texto de *Introdução ao Cálculo Diferencial*, a quem deixo aqui registrado meu grande respeito e gratidão, por sua competência e companheirismo.

Espero que, ao longo deste nosso encontro, discutindo os conceitos e aprendendo técnicas para resolução de problemas, surjam novas ideias e propostas para melhorar ainda mais o diálogo que este livro busca proporcionar.

A autora

Introd_calc_Integral_2011.indd 12 30/03/2011 07:43:11

AULA 1

A variação acumulada

OBJETIVO
Desfazer a ação da derivada e estudar a noção de *variação acumulada* relativa a uma taxa de variação. Relacionar as noções de *variação acumulada* e de *variação total* da função em um intervalo.

1) INTRODUÇÃO

Em nossa aula sobre *Taxa de variação instantânea, derivada e reta tangente a gráficos*,[1] desenvolvemos estratégias e algoritmos para determinar a taxa instantânea de variação (ou derivada) de uma função conhecida $y = F(t)$.

Aqui, nosso objetivo é o de desenvolver estratégias para recuperarmos informações sobre uma quantidade expressa por uma função $F(t)$, no caso de conhecermos a sua taxa instantânea de variação $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$. Isso quer dizer: pretendemos obter informações sobre uma função $F(t)$ a partir do conhecimento de sua *taxa instantânea de variação* $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$.

Para isso, vamos trabalhar a noção de *variação acumulada* a partir de uma taxa $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$, em um intervalo $[a,b]$. Auxiliados por esta última, vamos aprender a estimar valores para a *variação total* $\Delta F = F(b) - F(a)$, neste mesmo intervalo.

A proposta nesta aula é a de discutirmos, juntos, alguns exemplos. Em alguns momentos, você resolverá questões, que são deixadas como exercícios.

Ao refinarmos os procedimentos técnicos para medir a *variação acumulada*, introduzimos a ideia de *partição* em intervalos, bem como, aos poucos, a notação utilizada em matemática que lhe corresponde.

[1] Aula 1 do livro *Introdução ao Cálculo Diferencial*.

Vamos também desenvolver o hábito de representar graficamente o processo que está sendo desenvolvido ao estimarmos a *variação acumulada* a partir de certa taxa de variação em um certo período, relacionando-o com a questão de medida de área sob uma curva.

Ao final desta aula, esperamos que você tenha se familiarizado com a noção de *variação acumulada* e de *variação total*, e com estratégias para estimá-la. Não esperamos que você domine completamente o uso da notação e linguagem proposto, o que irá se consolidar ao longo das nossas aulas.[2]

2) EXEMPLO: A *VARIAÇÃO ACUMULADA* DA ALTURA DE ANDRÉ

Este exemplo discute a *variação acumulada* e a *variação total* da altura de uma criança, o André, a partir da derivada da função altura em função da idade.

Para isso, explore a Tabela 1, que registra a taxa de crescimento (mensal) de André nos primeiros 10 meses de vida. Ao construí-la, o valor $f'(0)$ foi aproximado pela *taxa média de variação* de *f*, onde *f* é a função altura, no intervalo $[0,1]$; o valor $f'(1)$ foi aproximado pela taxa média de variação em $[1,2]$ etc. A última célula da tabela não está preenchida, pois não temos conhecimento sobre a altura de André em idades superiores a 12 meses.

Tabela 1

Taxa de variação instantânea da função altura em função da idade

t (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
$f'(t)$ (*cm/mês*)	0,0	3,5	4,5	3,0	2,5	2,5	2,7	2,8	2,0	1,83	

Como podemos estimar quantos centímetros André cresceu nos seus 6 primeiros anos de vida, a partir dessa tabela? Em outras palavras, como podemos estimar a *variação total* da altura do André, nos seus primeiros 6 meses de vida? Em linguagem matemática, como estimar o valor da *variação total* $\Delta f = f(6) - f(0)$?

Observe que estamos falando de estimativas, de aproximações. Devemos, no entanto, estabelecer os critérios para fazê-las.

Por exemplo, a Tabela 1 em que estamos trabalhando foi construída a partir de estimativas, com um critério claro: os valores que correspondem a *taxas de variação instantâneas* $f'(a)$ estão sendo aproximados por *taxas médias de variação* da altura de André, em períodos que contêm $t = a$, e que estão explícitos.[3] No caso em estudo, tais períodos foram determinados pelas visitas de André ao pediatra.

Retomando o procedimento em linguagem simbólica, o valor $f'(a)$ da *taxa de crescimento* de André num período $[a,b]$ foi aproximado pela

[2] Vale aqui uma observação sobre notação e linguagem matemática, uma vez que ela começa a se tornar densa à medida que nosso trabalho se desenvolve. Notação e linguagem técnicas, em qualquer área do conhecimento, podem a princípio parecer um obstáculo a mais em nossos esforços para entender o conteúdo. No entanto, aos poucos vocês perceberão que notações e linguagem matemática foram concebidas para garantir fluência nas manipulações algébricas, cálculos e demonstrações. Portanto, utilizá-las gradativamente, desde o início, irá garantir eficiência nas estimativas e algoritmos a serem desenvolvidos mais tarde.

[3] Pela definição de *taxa de variação instantânea*, faz sentido estimá-las por meio de *taxas médias*. Isso porque a *taxa de variação* $f'(a)$ foi definida como o valor para o qual se estabilizam as *taxas médias de variação* de *f*, calculadas em intervalos cada vez menores contendo *a*.

Introd_calc_Integral_2011.indd 14 30/03/2011 07:43:12

taxa média de crescimento ou de *variação da altura* no período, que é $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ou seja, $f'(a) \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Veja você como esta última expressão pode ser útil para obtermos uma estimativa para a *variação total* $\Delta f = f(b) - f(a)$, no período de tempo $[a, b]$: multiplicando ambos os membros por $\Delta t = (b - a)$, segue que $f'(a).\Delta t \approx \frac{\Delta f}{\Delta t}.\Delta t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(b - a) = f(b) - f(a)$.

Em outras palavras:

> Uma fórmula para estimar a *variação total* da altura $\Delta f = f(b) - f(a)$, no período $[a, b]$, pode ser $f'(a).\,\Delta t$.
> O último valor obtido a partir da taxa $f'(a)$ será chamado *variação acumulada* à taxa $f'(a)$, no período $[a, b]$. Este valor corresponde à *variação total* Δf da altura do André no período, caso ele tivesse crescido a uma taxa constante e igual a $f'(a)$.

Em seu primeiro mês de vida, André cresceu a uma taxa aproximada $f'(0) = 0$. Isso significa que André não cresceu, o que é coerente com o cálculo da *variação acumulada* $f'(0).\Delta t$ para a sua altura no período $[0,1]$, que é nula.

Estimativas para a *variação total* Δf nos outros períodos podem ser obtidas do mesmo modo:

Em $[1,2]$, a *variação total* $\Delta f = f(2) - f(1)$ é próxima da *variação acumulada* $f'(1).\Delta t = f'(1) \times 1 = 3{,}5 \times 1 = 3{,}5cm$.

Isso quer dizer que André cresceu aproximadamente $3{,}5cm$ no segundo mês de vida.

Em $[2{,}2.5]$,
$\Delta f = f(2{,}5) - f(2) \approx f'(2).\Delta t = f'(2) \times 0{,}5 = 4{,}5 \times 0{,}5 = 2{,}25cm$

Em $[2{,}5,\ 3{,}5]$,
$\Delta f = f(3{,}5) - f(2{,}5) \approx f'(2{,}5).\Delta t = f'(2{,}5) \times 1 = 3{,}0 \times 1 = 3{,}0\,cm$

Em $[3{,}5,\ 4{,}5]$,
$\Delta f = f(4{,}5) - f(3{,}5) \approx f'(3{,}5).\Delta t = f'(3{,}5) \times 1 = 2{,}5 \times 1 = 2{,}5cm$

Em $[4{,}5,\ 6{,}0]$ a *variação total* foi
$\Delta f = f(6) - f(4{,}5) \approx f'(4{,}5).\Delta t = f'(4{,}5) \times 1{,}5 = 2{,}5 \times 1{,}5 = 3{,}75\ cm.$

Assim, uma estimativa para a *variação total* da altura do André no período $[0,6]$ a partir dos dados da Tabela 1 poderá ser obtida adicionando as *variações acumuladas* em cada período determinado pela visita ao pediatra, como calculadas acima:

Introd_calc_Integral_2011.indd 15 30/03/2011 07:43:12

$$f'(0).\Delta t + f'(1).\Delta t + f'(2).\Delta t + f'(2,5).\Delta t + f'(3,5).\Delta t + f'(4,5).\Delta t =$$
$$= 0cm + 3,5cm + 2,25cm + 3,0cm + 2,5cm + 3,75cm = 15cm.$$

Sabendo que André nasceu com 46,0 *cm*, aos seis meses sua altura era de aproximadamente 61 *cm*. Vale a pena também explorar simbolicamente a expressão que nós efetuamos:

$$\left(f(1)-f(0)\right)+\left(f(2)-f(1)\right)+\left(f(2,5)-f(2)\right)+$$
$$+\left(f(3,5)-f(2,5)\right)+\left(f(4,5)-f(3,5)\right)+\left(f(6)-f(4,5)\right)\approx$$
$$\approx f'(0).\Delta t+f'(1).\Delta t+f'(2).\Delta t+f'(2,5).\Delta t+f'(3,5).\Delta t+f'(4,5).\Delta t$$

Veja que no segundo membro da igualdade quase todos os valores entre parênteses podem ser cancelados, resultando em $\Delta f = f(6) - f(0)$, que é a *variação total* da altura no período $[0,6]$. Verifique esta afirmação, porque ela é importante!

2.1 Exercício

Vamos recuperar os dados sobre a evolução da altura de André nos primeiros nove meses de vida, a partir dos dados na Tabela 1?

Sabemos que André nasceu com 46 *cm*. Pelo exemplo anterior, obtivemos sua altura no início do sexto mês, que foi 61 *cm*. Trabalhando daquele mesmo modo, complete os dados em nossa tabela:

Tabela 2

A altura de André em função da idade, recuperada pelo cálculo da *variação acumulada* a partir da Tabela 1

t (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
$f(t)$ (*cm/mês*)	46,0						61,0				

3) EXEMPLO: A *VARIAÇÃO ACUMULADA* DA DISTÂNCIA PERCORRIDA

Aqui vamos discutir como calcular a distância percorrida por um objeto em função do tempo do percurso. Para isso, estude a seguinte história:

Em certa ocasião, Jussara viajava a São Paulo com frequência. Um dia, ao verificar que o hodômetro de seu carro não estava funcionando, ela passou a registrar a *velocidade instantânea* indicada no velocímetro de seu carro, em intervalos regulares de tempo de 15 minutos. Com esses dados sobre sua velocidade, ela fez estimativas para a distância percorrida, e, é claro, para a distância que ainda devia percorrer para chegar a sua casa.

Introd_calc_Integral_2011.indd 16 30/03/2011 07:43:13

Antes de apresentarmos os dados obtidos por Jussara, vamos discutir por que é possível estimarmos o cálculo da distância percorrida a partir do conhecimento de valores da velocidade instantânea.

Torna-se possível estimarmos esse cálculo porque, como sabemos, a velocidade $y = v(t)$ é a *taxa de variação* da função espaço percorrido $y = s(t)$ em relação ao tempo. Simbolicamente, $\frac{ds}{dt} = v(t)$.

Se num dado intervalo de tempo, digamos, de $\frac{1}{2}$ hora, a velocidade de um carro for constante e igual a 80 *km/h*, numa mesma direção e sentido, sabemos que o deslocamento do carro neste intervalo de tempo será de $80.\frac{1}{2} = 40$ *km*.

Utilizando as noções que estamos introduzindo, a afirmação acima é o mesmo que dizer que a *variação total* (da função espaço percorrido $y = s(t)$) em $[0,\frac{1}{2}]$ estimada por meio do cálculo da *variação acumulada* à taxa de $y = v(t) = 80$ *km/h* será

$\Delta s = s(\frac{1}{2}) - s(0) =$ Taxa de variação × intervalo de tempo $= v.\Delta t = 80.\frac{1}{2} = 40$ *km*.

Esse valor seria, geralmente, uma estimativa para a *variação total* do espaço percorrido num intervalo de tempo $\Delta t = \frac{1}{2}$ hora. Neste exemplo, com a hipótese de que a velocidade se manteve constante, teremos o valor da *variação acumulada* correspondendo ao valor exato da *variação total*.

Em outras palavras:

Uma fórmula para estimar a *variação total* da distância $\Delta s = s(b) - s(a)$, no período de tempo $[a,b]$, pode ser $s'(a).\Delta t$ (que é o mesmo que $v(a).\Delta t$).

O valor $s'(a).\Delta t$, obtido a partir da taxa $s'(a)$, será chamado de *variação acumulada* à taxa $s'(a)$, no período $[a,b]$. Este valor corresponde à *variação total* Δs da distância ou distância percorrida no período caso a velocidade fosse constante e igual a $s'(a)$; ou seja, corresponde à distância percorrida naquele período de tempo caso a velocidade fosse constante e igual a $s'(a)$.

3.1 Exercício

Represente

$v(t) = 80$, para t em $[0,\frac{1}{2}]$

em um gráfico da *velocidade* × *tempo*. Neste gráfico que você desenhou, você tem alguma ideia sobre como representar o valor da *variação acumulada*, que neste exemplo corresponde à distância total percorrida?

3.2 Exemplo: retomando a viagem de Jussara

Vamos retomar nossa discussão sobre a viagem de Jussara a partir de dados que ela registrou, e que estão reproduzidos na tabela a seguir:

Tabela 3

Velocidade no velocímetro do carro, em função do tempo

Tempo (h)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$
Velocidade (km/h)	70	75	100	100	110	120

Observe que, de modo diferente da construção da Tabela 1, a Tabela 3 está mantendo intervalos de comprimentos Δt iguais (com a variável *tempo* agora medida em horas). No caso da Tabela 1, visitas ao pediatra foram antecipadas por algum motivo, o que resultou em uma subdivisão, ou partição, do período de seis meses em intervalos de comprimento desiguais.[4] No caso de Jussara, ela teve liberdade de escolha, e o fez como na Tabela 3, escolhendo intervalos de tempo de comprimento $\Delta t = \frac{1}{4}$. Seu motivo foi manter um padrão de organização de seus dados e seu conhecimento sobre a praticidade desse padrão para efetuar os cálculos ao final, como você verá.

Por meio dessa tabela, nem sempre poderíamos calcular a distância *exata* percorrida pelo carro (você saberia discutir por quê?). Mas podemos *estimar* a distância percorrida por Jussara após 1 hora e 15 minutos de viagem.

Como sua velocidade $y = v(t)$ era registrada em quilômetros por hora, e o intervalo Δt de 15 minutos corresponde a $\frac{1}{4}$ de hora, temos que:

Se em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ Jussara manteve sua velocidade constante e igual a $v(0) = 70\,km/h$, ela percorreu nos primeiros 15 minutos $v(0).\,\frac{1}{4} = 70.\,\frac{1}{4} = 17{,}5km$. Ou seja, a distância percorrida em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ foi $\Delta s = s\left(\frac{1}{4}\right) - s(0) = v(0).\Delta t = v(0).\,\frac{1}{4} = 17{,}5km$.

Se no intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ a velocidade fosse mantida constante e igual a $v\left(\frac{1}{4}\right) = 75\,km/h$, o percurso seria de $v\left(\frac{1}{4}\right).\,\frac{1}{4} = 75.\,\frac{1}{4} = 18{,}75\,km$. Ou seja, a distância percorrida em $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ seria

$$\Delta s = s\left(\tfrac{1}{2}\right) - s\left(\tfrac{1}{4}\right) = v\left(\tfrac{1}{4}\right).\,\Delta t = v\left(\tfrac{1}{4}\right).\,\tfrac{1}{4} = 18{,}75\,km.$$

Se em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ a velocidade fosse mantida constante e igual a $v\left(\frac{1}{2}\right) = 100\ km/h$, a quilometragem rodada seria

$$v\left(\tfrac{1}{2}\right).\,\Delta t = v\left(\tfrac{1}{2}\right).\,\tfrac{1}{4} = 100\,.\,\tfrac{1}{4} = 25\,km.$$

[4] Ressalte-se que a construção aqui apresentada para a solução da questão não é única, podendo, por exemplo, partir da semelhança dos triângulos.

Introd_calc_Integral_2011.indd 18 30/03/2011 07:43:14

Se no intervalo $\left[\frac{3}{4},1\right]$ a velocidade fosse constante e igual a $v\left(\frac{3}{4}\right)$ = = 100 *km/h*, a distância percorrida seria, novamente,

$$v\left(\tfrac{3}{4}\right).\Delta t = v\left(\tfrac{3}{4}\right).\tfrac{1}{4} = 100.\tfrac{1}{4} = 25\,km.$$

Se no intervalo $\left[1,\frac{5}{4}\right]$ a velocidade foi mantida em $v(1) = 110\ km/h$, o espaço percorrido pelo carro foi $v(1).\frac{1}{4} = 110.\frac{1}{4} = 27{,}5\,km$. Ou seja, com essa hipótese, o espaço percorrido em $\left[1,\frac{5}{4}\right]$ foi

$$\Delta s = s\left(\tfrac{5}{4}\right) - s(1) = v(1).\Delta t = v(1).\tfrac{1}{4} = 27{,}5\,km.$$

Na verdade, Jussara não manteve sua velocidade constante durante os intervalos de tempo, como nós consideramos. Por isso vamos escrever que a distância total percorrida D após uma hora e 15 de viagem foi de *aproximadamente*

$$v(0).\tfrac{1}{4} + v\left(\tfrac{1}{4}\right).\tfrac{1}{4} + v\left(\tfrac{1}{2}\right).\tfrac{1}{4} + v\left(\tfrac{3}{4}\right).\tfrac{1}{4} + v(1).\tfrac{1}{4} =$$

$$70.\tfrac{1}{4} + 75.\tfrac{1}{4} + 100.\tfrac{1}{4} + 100.\tfrac{1}{4} + 110.\tfrac{1}{4} = 113{,}75km.$$

Reescrevendo em termos das noções que estamos introduzindo, a *variação total* Δs (que é a distância total D) no intervalo $\left[0,\frac{5}{4}\right]$ será estimada (ou seja, aproximada) pela adição das *variações acumuladas* nos subintervalos $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ etc.

$$v(0).\Delta t + v\left(\tfrac{1}{4}\right).\Delta t + v\left(\tfrac{1}{2}\right).\Delta t + v\left(\tfrac{3}{4}\right).\Delta t + v(1).\Delta t = 113{,}75km$$

Ou seja,

$$\Delta s = s\left(\tfrac{5}{4}\right) - s(0) \approx v(0).\Delta t + v\left(\tfrac{1}{4}\right).\Delta t + v\left(\tfrac{1}{2}\right).\Delta t + v\left(\tfrac{3}{4}\right).\Delta t + v(1).\Delta t =$$

$$= 113{,}75\ km.$$

Observe que, com esse procedimento, nós recuperamos dados sobre a função distância percorrida $y = s(t)$, através de valores conhecidos de sua taxa instantânea de variação – a função velocidade $y = v(t)$. Ou seja, a *variação total* da função distância no período $\left[0,\frac{5}{4}\right]$, que se escreve $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s(0)$, está sendo estimada por meio da *variação acumulada* à taxa $y = v(t)$, como registrada na Tabela 3.

3.3 Exercício

Represente os dados da tabela anterior em um gráfico da *velocidade* × *tempo*. Para isso suponha, como no desenvolvimento de nosso exemplo anterior, que a velocidade se manteve constante nos intervalos $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ etc. (A função $y = v(t)$ que você vai representar terá um gráfico que lembra o da função preço da corrida de táxi, já estudada na disciplina anterior.) Neste gráfico, e com a suposição de que a velocidade se manteve constante nos intervalos de tempo considerados, procure representar o espaço total percorrido D.

Introd_calc_Integral_2011.indd 19 30/03/2011 07:43:15

Ou seja, procure representar no gráfico que você esboçou a *variação total* $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s\left(0\right)$ da função distância $y = s(t)$.

3.4 Exemplo: ainda o estudo de velocidade

Vamos interpretar os dados da Tabela 3 como sugerindo uma tendência de crescimento na velocidade com que Jussara estava dirigindo. Ou seja, vamos supor que a função $y = v(t)$ que estaria modelando sua velocidade seja crescente no intervalo $\left[0, \frac{5}{4}\right]$. Neste caso, observe que no exemplo 3.2 teríamos obtido uma estimativa *por falta* do valor D da distância que foi percorrida. Isso porque em cada subintervalo de tempo de 15 minutos, consideramos que Jussara dirigiu a uma velocidade que corresponderia ao seu menor valor naquele período de tempo: aquela que, neste caso, teria sido calculada no extremo inferior de cada subintervalo de tempo $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ etc. Confira na tabela!

Podemos afirmar que a distância total D percorrida é maior que o valor obtido, ou seja, $D \geq 113,75\ km$.

Podemos ainda obter uma aproximação *por excesso* para este valor pensando do seguinte modo:

- de acordo com a Tabela 3, nos primeiros 15 minutos, a velocidade do carro foi de, no máximo, 75 *km/h*. Diferente do que fizemos em 3.2, vamos considerar aqui a velocidade $v(t)$ constante e igual a $v(\frac{1}{4})$ no intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$;
- já no segundo intervalo de tempo, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, a velocidade registrada foi de no máximo 100 *km/h*, que corresponde a $v(\frac{1}{2})$. Tomaremos este como o valor constante da velocidade $v(t)$ em $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$;
- no terceiro intervalo, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, a velocidade seria no máximo 100 *km/h*, que corresponde ao valor de $v(\frac{3}{4})$; e assim por diante.

Observe que estamos agora considerando, em cada intervalo de $\frac{1}{4}$ de hora, os valores da velocidade $v(\frac{1}{4})$, $v(\frac{1}{2})$, $v(\frac{3}{4})$ etc., como registrados, respectivamente, nos extremos esquerdos de cada um dos intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ etc.

Relembrando o fato de que estamos supondo que a função $y = v(t)$ é crescente, a estimativa *por excesso* da distância será

$$v(\tfrac{1}{4}) \cdot \tfrac{1}{4} + v(\tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{4} + v(\tfrac{3}{4}) \cdot \tfrac{1}{4} + v(1) \cdot \tfrac{1}{4} + v(\tfrac{5}{4}) \cdot \tfrac{1}{4} =$$
$$75 \cdot \tfrac{1}{4} + 100 \cdot \tfrac{1}{4} + 100 \cdot \tfrac{1}{4} + 110 \cdot \tfrac{1}{4} + 120 \cdot \tfrac{1}{4} = 126{,}25\ km.$$

Assim, a distância total D é menor que o valor obtido, ou seja, $D \leq 126,25\ km$.

Podemos dizer que $113,75\,km \leq D \leq 126,25\,km$. A diferença entre estes dois valores é de $12,50\,km$. Esta nos permite conhecer a margem de erro que estamos cometendo em nossas estimativas do valor da distância D, ou seja, da *variação total* $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s\left(0\right)$.

3.5 Exercício

Represente os dados exemplificados em 3.4 em um gráfico da velocidade em função do tempo. Em sua percepção, o que poderia estar representando neste gráfico o valor da distância total percorrida, estimado *por excesso*?

3.6 Exemplo: melhorando estimativas

O que podemos sugerir a Jussara para melhorar sua estimativa da distância percorrida? Podemos sugerir que ela registre sua velocidade considerando uma partição em intervalos de tempo menores do que 15 minutos! (Talvez, convidando um amigo para ajudá-la, durante a viagem.) Suponhamos que um registro assim tenha sido feito, em intervalo de tempo de cinco minutos, como na tabela a seguir.

Tabela 4a

Velocidade no velocímetro do carro, em função do tempo

Tempo (h)	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$
Velocidade (km/h)	70	73	75	75	80	90	100	100	100

Tabela 4b

Velocidade no velocímetro do carro, em função do tempo

Tempo (h)	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{14}{12}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{17}{12}$
Velocidade (km/h)	100	105	110	110	115	118	120	120	125

3.7 Exercício

(a) Usando uma calculadora, calcule o valor das aproximações *por falta* e *por excesso* da distância D percorrida, ou seja, do valor $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s\left(0\right)$, considerando uma partição de $\left[0, \frac{5}{4}\right]$ em intervalos de tempo de 5 minutos, ou seja, $\frac{1}{12}$ avos de uma hora. Para isso considere, como anteriormente, a função velocidade como uma função crescente.

(b) Faça a diferença entre os valores das duas aproximações encontradas. Compare esse resultado com a diferença obtida ao final do exemplo 3.4. Discuta esse resultado, dizendo o que ele significa para você em termos da estimativa do valor da distância percorrida.

(c) Represente os dados exemplificados acima em um gráfico da velocidade em função do tempo, bem como o valor da distância total percorrida, estimado *por falta* e *por excesso*.

(d) Compare este último gráfico com os outros obtidos nos outros exemplos, comentando o que ele sugere estar acontecendo, em termos da estimativa feita.

4) DEFINIÇÕES

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar definições dos conceitos que viemos utilizando: *variação acumulada* a uma taxa conhecida, *variação total* de uma função em um intervalo, e de *partição* de um intervalo.

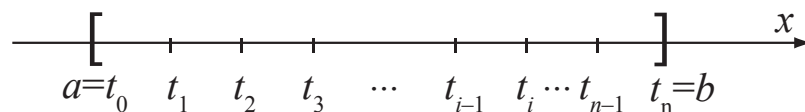
4.1 Definição

A *variação total* de uma função $y = F(t)$. num intervalo $\left[a,b\right]$ é o valor $\Delta F = F(b) - F(a)$.

4.2 Definição

A *variação acumulada* a uma taxa de variação $\frac{dF}{dt}$, constante em um intervalo de comprimento Δt, é o valor $\frac{dF}{dt}.\Delta t$.

4.3 Definição

Uma *partição* P de um intervalo $\left[a,b\right]$ é qualquer subdivisão deste intervalo em intervalos menores de extremos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, como representado na figura a seguir.

Nesta aula estamos, de certo modo, "desmanchando" o processo desenvolvido em encontros do curso anterior de Introdução ao Cálculo

Introd_calc_Integral_2011.indd 22 30/03/2011 07:43:16

Diferencial. Naqueles encontros, a *taxa de variação instantânea* foi definida a partir da análise da taxa média $\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ em intervalos $[a, b]$, de comprimentos cada vez menores. Aqui, uma vez conhecida a taxa de variação $\frac{dF}{dt}$ de uma função $F(t)$, estamos utilizando-a para estimar a *variação total* $\Delta F = F(b) - F(a)$ no intervalo $[a, b]$.

Aproximações para $\Delta F = F(b) - F(a)$ por meio da *variação acumulada* a partir da taxa $\frac{dF}{dt}$ são obtidas e melhoradas, para recuperar a ação da função $F(t)$, como nos exemplos desta aula. Vamos explorar essas ideias ainda mais uma vez, no exemplo a seguir.

5) EXEMPLO: A EXPRESSÃO DO VOLUME $V(t)$ A PARTIR DE $\frac{dV}{dt}$

Um balão de gás é enchido a uma taxa $y = \frac{dV}{dt} = 3t \ cm^3 / \text{min}$. Sabendo que o balão continha um volume inicial de $5cm^3$ de gás, como obter a variação de seu volume no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 3$min?

Observe que a variação do volume solicitada é a *variação total* do volume de gás que foi acumulada, no intervalo de tempo, à taxa de $3t \ cm^3 / \text{min}$.

O intervalo de tempo em estudo é o intervalo $[0, 3]$. Dividindo este intervalo em dois pedaços, ou seja, tomando $n = 2$, ele estará inicialmente dividido em subintervalos de comprimentos Δt iguais, que valem $\Delta t = \frac{3 - 0}{2} = \frac{3}{2}$.

Nosso intervalo de tempo seria escrito como a união de dois subintervalos: o primeiro, $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, de extremos 0 e $\frac{3}{2}$; e o segundo, $\left[\frac{3}{2}, \frac{6}{2}\right]$, de extremos $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{2}$. (Represente-os num desenho na reta!)

A proposta aqui é medirmos a *variação acumulada* a cada $\frac{3}{2}$ minutos, considerando que sua variação ocorra a uma taxa fixa em cada subintervalo, estimada a partir da taxa de variação real $y = \frac{dV}{dt} = 3t$.

Observe que $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ é uma função crescente.

Portanto, uma estimativa *por falta* do valor da *variação acumulada* do volume de gás nos primeiros $\frac{3}{2}$ minutos seria $\left(\frac{dV}{dt}(0)\right) . \frac{3}{2} = 0$.

Isso quer dizer que, em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, uma estimativa por falta para $\Delta V = V\left(\frac{3}{2}\right) . V(0) = \left(\frac{dV}{dt}(0)\right) . \frac{3}{2} = 0$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 23 30/03/2011 07:43:16

Nos últimos $\frac{3}{2}$ minutos, uma estimativa por falta da *variação acumulada* do volume de gás seria $\left(\frac{dV}{dt}(\frac{3}{2})\right).\frac{3}{2} = \frac{9}{2}.\frac{3}{2} = \frac{27}{4}$. Ou seja, em $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$, uma estimativa por falta para $\Delta V = V(3).V(\frac{3}{2})\left(\frac{dV}{dt}(\frac{3}{2})\right).\frac{3}{2} = \frac{9}{2}.\frac{3}{2} = \frac{27}{4}$.

Desse modo, uma primeira estimativa para a *variação total* ΔV por meio da *variação acumulada* à taxa $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ no intervalo de tempo $[0,3]$ é obtida quando adicionamos as variações em cada subintervalo e se escrevemos:

$\Delta V = (V(\frac{3}{2}) - V(0)) + (V(3) - V(\frac{3}{2})) \approx 0.\frac{3}{2} + \frac{9}{2}.\frac{3}{2} = \frac{27}{4}$.

Observe, novamente, que as expressões das parcelas entre parênteses podem ser canceladas, tendo como resultado $V(3) - V(0)$.

5.1 Exercício

Represente a função $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ em um gráfico da taxa de variação do volume em função do tempo (eixos cartesianos serão $t \times \frac{dV}{dt}$). Ainda neste gráfico, situe, no eixo t, o intervalo de tempo $[0,3]$, e os respectivos subintervalos $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}, \frac{6}{2}\right]$. Supondo $\frac{dV}{dt}$ constante em cada um dos subintervalos, como foi desenvolvido no exemplo anterior, represente a função (do tipo da função preço da corrida de táxi) resultante.

Você sabe representar a estimativa para o valor da *variação acumulada* neste gráfico?

5.2 Exemplo: aproximação por excesso para ΔV

Dando prosseguimento a estimativas do valor ΔV, podemos obter uma aproximação por excesso ainda com $n = 2$ e $\Delta t = \frac{3}{2}$ como a seguir.

Usando o fato de $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ ser crescente, basta considerarmos o valor $\frac{dV}{dt}(\frac{3}{2})$, que é o maior valor da taxa de variação nos primeiros $\frac{3}{2}$ minutos, no cálculo do valor aproximado da variação do volume, correspondente então ao primeiro subintervalo de tempo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Ainda, tomamos $\frac{dV}{dt}(3)$ no cálculo do valor aproximado da variação do volume, no segundo intervalo de tempo, $\left[\frac{3}{2}, \frac{6}{2}\right]$. Verifique no gráfico!

Introd_calc_Integral_2011.indd 24 30/03/2011 07:43:17

A *variação acumulada* no primeiro subintervalo é:

$$\left(\frac{dV}{dt}\left(\tfrac{3}{2}\right)\right).\tfrac{3}{2}=\tfrac{9}{2}.\tfrac{3}{2}=\tfrac{27}{4}.$$

A *variação acumulada* no segundo subintervalo é:

$$\left(\frac{dV}{dt}(3)\right).\tfrac{3}{2}=3.3.\tfrac{3}{2}=\tfrac{27}{2}.$$

Uma aproximação *por excesso* para a *variação total* ΔV no intervalo $[0,3]$ é dada por

$$\left(\frac{dV}{dt}\left(\tfrac{3}{2}\right)\right).\tfrac{3}{2}+\left(\frac{dV}{dt}(3)\right)\tfrac{3}{2}=\tfrac{9}{2}.\tfrac{3}{2}+3.3.\tfrac{3}{2}=\tfrac{27}{4}+\tfrac{27}{2}=\tfrac{81}{4}.$$

5.3 Exercício

Represente estes novos dados no gráfico esboçado no exercício anterior.

5.4 Exemplo: melhorando a estimativa para a *variação total*

Refinando o processo que estamos utilizando, podemos subdividir o intervalo $[0,3]$ em $n = 4$ subintervalos, por exemplo, de comprimentos $\Delta t = \frac{3}{4}$. Em procedimento análogo ao anterior, aproximações *por falta* e *por excesso* para a *variação total* podem ser obtidas por meio da adição de *variações acumuladas*.

Numa estimativa *por falta*, a *variação total* é aproximadamente:

$$\Delta V \approx 0\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{27}{4}\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{162}{16}.$$

Uma aproximação *por excesso* para a *variação acumulada* nos dá:

$$\Delta V \approx \tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{27}{4}\cdot\tfrac{3}{4}+9\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{183}{16}.$$

5.5 Exercício

(a) Represente os dados do último exemplo em um gráfico da função variação do volume em função do tempo, que é $y=\dfrac{dV}{dt}=3t$. Compare a diferença entre as estimativas por falta e por excesso (por meio da *variação acumulada*) para a *variação total* correspondentes a $\Delta t = \frac{3}{2}$ e $\Delta t = \frac{3}{4}$.

O que você acha que vai acontecer, se você dividir o intervalo em 8 partes?

Introd_calc_Integral_2011.indd 25 30/03/2011 07:43:17

(b) Refaça o procedimento utilizado acima, dividindo o intervalo em 8 partes, ou seja, considerando $\Delta t = \frac{3}{8}$. Registre os dados e calcule aproximações *por falta* e *por excesso* da *variação total*. Represente a função $y = \frac{dV}{dt} = 3t$, e os dados obtidos ao tomar $\Delta t = \frac{3}{8}$, num gráfico.

(c) O que lhe sugere o gráfico desenhado no exercício em (b)? A partir de sua análise, você arriscaria enunciar um outro procedimento para determinar (exatamente) a *variação total* ΔV, neste caso?

6) REFERÊNCIA

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Educação a Distância. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

Introd_calc_Integral_2011.indd 26 30/03/2011 07:43:17

AULA 2

A Integral Definida

OBJETIVO
Apresentar a noção de *Integral Definida* a partir do cálculo da *variação total* por meio de soma de *variações acumuladas*.

1) INTRODUÇÃO

Na aula anterior, desenvolvemos estratégias para recuperarmos informações sobre uma função a partir do conhecimento de sua taxa de variação. Apresentamos as noções de *variação total* e de *variação acumulada*.

Nesta aula, vamos apresentar a noção de *Integral Definida*, a partir de um refinamento da estratégia de cálculo da *variação total* por meio de *variações acumuladas*. Notação e linguagem compõem um aspecto denso neste texto, e, novamente, importante é o desenvolvimento do trabalho nesta disciplina.

Ao final, esperamos que você seja capaz de estimar a *Integral Definida* de funções expressas em gráficos, fórmulas e tabelas. Em algumas situações bem especiais, esperamos que você seja capaz de determinar seu valor real. É importante ainda que, ao final desta aula, você perceba que cálculos de *áreas* e de *variações totais* podem ser obtidos como uma *Integral Definida*; e que o cálculo de *Integrais Definidas* e de *variações totais* pode ser obtido através do cálculo de *áreas*.

Como na aula anterior, vamos explorar alguns exemplos.

2) RECUPERANDO $Y = F(t)$ A PARTIR DE SUA TAXA $\frac{dY}{dt} = f(t) = t^2$

Em nosso último exemplo na primeira aula, recuperamos informações sobre a função $y = V(t)$, a partir do cálculo de *variações acumuladas* à

Introd_calc_Integral_2011.indd 27 30/03/2011 07:43:17

taxa $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ no intervalo $[0,3]$. Em exercício ao final, ressaltamos que nossas estimativas parecem corresponder à medida de uma área, que naquele caso sabíamos encontrar.

Vamos retomar o procedimento utilizado naquele exercício e buscar informações sobre função $y = F(t)$ cuja taxa de variação é $y = f(t) = t^2$, no intervalo $[0,1]$. Vamos representar geometricamente o processo, verificando sua relação com o cálculo de áreas neste novo exemplo, como no último exercício proposto em nossa primeira aula.

Primeiro, dividimos o intervalo $[0,1]$ em duas partes, ou seja, considerando uma *partição* em que $n = 2$. Neste caso $\Delta t = \frac{1}{2}$, e teremos como subintervalos da partição os intervalos $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2},1\right]$, de extremos $0,\ \frac{1}{2},\ 1$.

Do fato de a taxa de variação $v = f(t) = t^2$ ser crescente, estimativas *por falta* e *por excesso* para ΔF serão calculadas como a seguir.

2.1 Exemplo: estimativas por falta para ΔF

Para calcular estimativas por falta para ΔF no subintervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, consideramos a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = 0$, que é o *extremo esquerdo* do intervalo (menor valor da taxa de variação no subintervalo, no caso desta função).

Para o subintervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, consideramos a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = \frac{1}{2}$, que é o *extremo esquerdo* do intervalo (que corresponde ao menor valor da taxa no subintervalo, no caso desta função).

A tabela a seguir representa estes dados, escritos para a estimativa *por falta*:

Tabela 1

Estimativa por falta

t	0	$\frac{1}{2}$
$y = f(t)$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Como fizemos na Aula 1, a *variação total*

$$\Delta F \approx f(0).\Delta t + f\left(\tfrac{1}{2}\right).\Delta t = 0 \,.\, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \,.\, \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}\,.$$

Veja a representação destes dados no gráfico da Figura 1. Observe a região hachurada. Ela representa a estimativa *por falta* que obtivemos para a *variação total* ΔF. Você sabe dizer por quê?

Introd_calc_Integral_2011.indd 28 30/03/2011 07:43:18

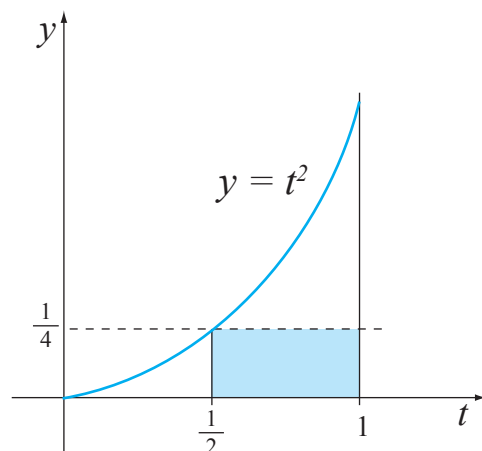



Figura 1: representação dos dados da Tabela 1

2.2 Exemplo: estimativas por excesso para ΔF

Ainda pelo fato de a taxa de variação $y = f(t) = t^2$ ser crescente, estimativas *por excesso* para ΔF podem ser calculadas como a seguir:

No subintervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, considere a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = \frac{1}{2}$, que é o *extremo direito* do intervalo (que corresponde ao maior valor da taxa no subintervalo, no caso desta função).

No subintervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, considere a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = 0$, que é o *extremo direito* do intervalo (maior valor da taxa no subintervalo, no caso desta função).

A tabela a seguir representa estes dados, calculados para a estimativa *por excesso*:

Tabela 2

Estimativa por excesso

t	$\frac{1}{2}$	1
$y = f(t)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	1

$$\Delta F \approx f\left(\tfrac{1}{2}\right).\Delta t + f(1).\Delta t = \tfrac{1}{4}\,.\,\tfrac{1}{2} + 1\,.\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}.$$

Veja agora o gráfico da Figura 2, que representa estes dados. A região hachurada representa a estimativa *por excesso* que obtivemos para a *variação total* ΔF. Você vê alguma relação entre a soma da medida das áreas dos retângulos de alturas $\frac{1}{4}$ e 1, e base $\Delta t = \frac{1}{2}$ com o valor da *variação total* ΔF?

Introd_calc_Integral_2011.indd 29 30/03/2011 07:43:18

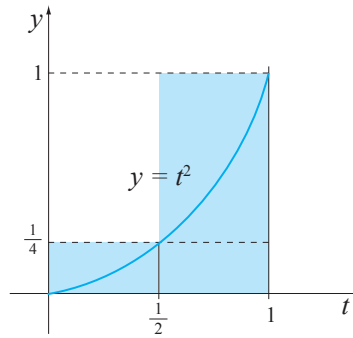



Figura 2: representação dos dados da Tabela 2

2.3 Exemplo: refinando a estimativa para a *variação total* ΔF

A fim de melhorar nossa estimativa para o valor da *variação total* ΔF, consideremos agora uma partição do intervalo em que $n = 3$. Esta corresponderá a $\Delta t = \frac{1}{3}$. Teremos os subintervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, de extremos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. As estimativas *por falta* e *por excesso* de ΔF serão calculadas com auxílio de tabelas, construídas como no caso $n = 2$:

Tabela 3

Estimativa por falta

t	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y = f(t)$	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$\Delta F \approx f(0) \,.\, \Delta t + f\left(\tfrac{1}{3}\right) . \,\Delta t + f\left(\tfrac{2}{3}\right) . \,\Delta t = 0 \,.\, \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} \,.\, \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{9} \,.\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{27}\,.$$

Tabela 4

Estimativa por excesso

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y = f(t)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	1

$$\Delta F \approx f\left(\tfrac{1}{3}\right) . \,\Delta t + f\left(\tfrac{2}{3}\right) . \,\Delta t + f(1) \,.\, \Delta t = \tfrac{1}{9} \,.\, \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{9} \,.\, \tfrac{1}{3} + 1 \,.\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{14}{27}\,.$$

2.4 Exercício

(a) Represente a função $y = f(t) = t^2$ e os dados acima em um mesmo gráfico cartesiano, como no caso $n = 2$. Escreva o valor das alturas dos retângulos cuja soma das áreas corresponde à aproximação por excesso do valor ΔF.

(b) Repita os procedimentos dos exercícios anteriores para $n = 4$, $\Delta t = \frac{1}{4}$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 30 30/03/2011 07:43:19

(c) Descreva com suas palavras o que a sequência de gráficos que você desenhou nos itens (a) e (b) nos exercícios anteriores lhe sugere.

2.5 Notação e linguagem

Seja $y = f(t)$ definida em intervalo $[a,b]$ da reta *IR*. Vamos estabelecer uma linguagem específica para estimativas da *variação total* através do cálculo da *variação acumulada* a partir de $y = f(t)$ em $[a,b]$.

É usual dividirmos o intervalo $[a,b]$ em n partes ou subintervalos, de comprimento . Subintervalos serão escritos como $[a,t_1],[t_1,t_2],.....[t_{n-1},b]$. Seus extremos serão

$$a = t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots t_{i-1},\ t_i,\ \ldots t_n = b.$$

A estimativa para a *variação total* que se escreve $f(t_0).\Delta t + f(t_1).\Delta t + \ldots + f(t_{n-1}).\Delta t$ terá o nome Soma à Esquerda. Observe que a *variação acumulada* em cada subintervalo $[t_{i-1},t_i]$ assume a taxa com valor fixo igual a $f(t_{i-1})$; ou seja, é estimada a partir de uma taxa calculada nos extremos à esquerda de cada um dos subintervalos.

A estimativa da *variação total* que se escreve $f(t_1).\Delta t + f(t_2).\Delta t + \ldots + f(t_n).\Delta t$ terá o nome Soma à Direita. Observe como a *variação acumulada* em cada subintervalo $[t_{i-1},t_i]$ está sendo calculada.

Usando uma notação $\sum$, que sintetiza a expressão de somas de parcelas diversas, escreveremos:

$$f(t_0).\Delta t + f(t_1).\Delta t + \ldots + f(t_{n-1}).\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t \text{ (Soma à Esquerda)}$$

$$f(t_1).\Delta t + f(t_2).\Delta t + \ldots + f(t_n).\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t \text{ (Soma à Direita)}$$

2.6 Interpretação geométrica

Veja como podemos interpretar geometricamente as Somas à Direita e à Esquerda.

No caso de $y = f(t) \geq 0$, cada parcela $f(t_0).\Delta t$, $f(t_1).\Delta t$, $f(t_2).\Delta t$ etc. pode ser interpretada como o valor da medida da área de um retângulo de base Δt e alturas $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$ etc., respectivamente. Assim, para $y = f(t) \geq 0$, as Somas à Esquerda e à Direita definidas acima representam a soma de medidas de áreas de retângulos, de altura $f(t_1)$ e base Δt.

Introd_calc_Integral_2011.indd 31 30/03/2011 07:43:19

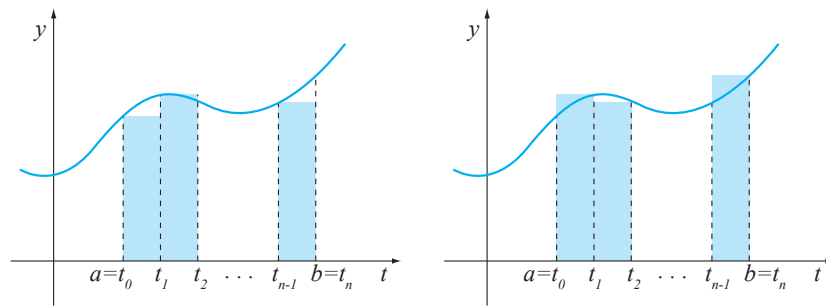



Figura 3: interpretação geométrica das Somas à Direita e à Esquerda para $y = f(t) \geq 0$

3) EXEMPLO: REFINANDO A ESTIMATIVA PARA A *VARIAÇÃO TOTAL*

Retomando nossa função $y = t^2$, vamos subdividir o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos. Neste caso, $\Delta t = \frac{1}{n}$.

Os subintervalos se escrevem como $\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\left[\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right], \ldots \left[\frac{n-1}{n},1\right]$, com extremos em $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$.

Para obtermos o valor da Soma à Direita, escrevemos as alturas dos retângulos $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, 1$.

A base dos retângulos será dada por $\Delta t = \frac{1}{n}$. O valor da Soma à Direita será escrito

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + 1^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

3.1 Exercício

(a) Escreva a Soma à Esquerda para $y = f(t) = t^2$, subdividindo o intervalo $[0,1]$ como anteriormente.

4) RESTRIÇÕES E NOTAÇÃO

Em consequência das escolhas que fizemos, estimativas para a *variação total* a partir da *variação acumulada* das funções estudadas podem ser melhoradas ao aumentarmos o número n de subintervalos.

A possibilidade de calcularmos um valor "exato" da *variação total*, que será debatida na aula sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, requer em primeiro lugar um estudo sobre como o procedimento de aumentar indefinidamente o valor de n pode ser proposto.

Neste curso vamos nos ater a verificar se o procedimento de aumentar o valor de n resulta, ou não, numa estabilização dos valores obtidos em cada *Soma*. Vamos dar um exemplo sobre como proceder. Mas antes relembramos a notação com que indicamos o desenvolvimento de processos como "aumentar indefinidamente o valor de n".

Introd_calc_Integral_2011.indd 32 30/03/2011 07:43:20

A notação $\lim_{n\to\infty}$ representa este processo e é lida: limite quando n tende ao infinito.

Nesta linguagem, nosso desafio se traduz por investigar a possibilidade de associar um número real às expressões $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ e $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t$.

Se para $y = f(t)$ num dado intervalo $[a,b]$ ambos os valores puderem ser definidos,[1] e se eles forem iguais, este valor terá o nome *Integral Definida*.

A notação usada para nos referirmos à *Integral Definida* será $\int_a^b f(t)dt$.

No caso das funções $y = f(t)$ que trabalhamos até agora, os limites $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t$ e $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ sempre existem e são iguais. Para este grupo de funções, enunciamos:

4.1 Definição

A *Integral Definida* de $y = f(t)$ no intervalo $[a,b]$ da reta *IR*, que se escreve $\int_a^b f(t)dt$, é definida como sendo o valor do limite da Soma à Direita $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ ou da Soma à Esquerda $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t$.

5) EXEMPLO: AUMENTANDO INDEFINIDAMENTE O VALOR DE n

No exemplo 3, obtivemos o valor $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2.\frac{1}{n}$ para a Soma à Direita, que corresponde à *variação acumulada* à taxa $y = f(t) = t^2$, no intervalo $[0,1]$.

Nosso objetivo neste exemplo será calcular $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2.\frac{1}{n}$.

Para isso, vamos trabalhar a expressão $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2.\frac{1}{n}$. Observe que $\left(\frac{i}{n}\right)^2.\frac{1}{n} = i^2.\frac{1}{n^3}$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2.\frac{1}{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right).\frac{1}{n^3}.$$

É possível mostrar que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[1] Nem sempre os valores $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t$ e $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ existem.

Introd_calc_Integral_2011.indd 33 30/03/2011 07:43:20

Poderemos então escrever:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i}{n}\right)^2 . \tfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) . \frac{1}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

Note que as duas últimas parcelas da última soma entre parênteses ficarão desprezíveis quando n crescer muito. Desse modo, a soma se estabiliza em $\frac{1}{3}$, quando n cresce indefinidamente.

Assim, afirmamos $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 . \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

Pela definição anterior, diremos que a *Integral Definida* de $y = f(t) = t^2$ de

0 a 1 é $\frac{1}{3}$ e escreveremos $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

5.1 Exercício

(a) Encontre o valor de $\int_0^1 t^2 dt$ calculando $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t$, ou seja, utilizando a Soma à Esquerda.

5.2 Notação e linguagem

As somas $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ e $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t$ são denominadas *Somas de Riemann* da função f.

A função f é denominada *integrando*, e os valores a e b denominam-se *limites de integração*. Comentamos que nem sempre os limites das *Somas de Riemann* existem. No caso de sua existência, as funções denominam-se *integráveis*. Neste texto, estaremos trabalhando com funções integráveis.

6) A DEFINIÇÃO DE ÁREA SOB UMA CURVA

Em exercícios anteriores, quando $y = f(t)$ era uma função positiva, sugerimos que cada termo da forma $f(t_i).\Delta t$ poderia ser interpretado como a medida da área de um retângulo de altura $f(t_i)$ e base Δt.

À medida que o número n de subintervalos cresce, o comprimento Δt se aproxima de zero. Neste processo, podem acontecer casos em que as somas das medidas das áreas dos retângulos se estabilizam em um valor real. Em nossos exemplos, ao representar geometricamente o

processo, os retângulos parecem se ajustar abaixo da curva do gráfico de $y = f(t)$.

Para o grupo de funções com as quais viemos trabalhando, vamos enunciar a seguinte definição:

6.1 Definição

Para $y = f(t)$ positiva em $[a,b]$, o valor da *Integral Definida* $\int_a^b f(t)dt$ representa a medida da área abaixo da curva do gráfico de $y = f(t)$, acima do eixo t, e entre as retas $t = a$ e $t = b$.

7) SOMA ALGÉBRICA DE ÁREAS

Nem sempre um fenômeno é modelado por uma função $F(t)$ em que a variação é acumulada a uma taxa $y = f(t)$ positiva. Por exemplo, numa reação química, pode haver perda de uma dada substância num certo intervalo de tempo $[c,d]$. Em matemática esse fato se traduziria por uma taxa f negativa em $[c,d]$. As áreas dos retângulos $f(t_i).\Delta t$ correspondentes a subintervalos de comprimento Δt contidos em $[c,d]$ serão subtraídas. Os valores de $f(t_i)$ seriam todos negativos em $[c,d]$. Na verdade, havendo perda de substância neste intervalo, a *variação acumulada* ΔF será negativa aí.

Neste caso, conhecendo a área S entre o gráfico de $y = f(t)$ e o eixo t no intervalo $[c,d]$, o valor $\int_c^d f(t)dt$ seria $-S$.

7.1 Definição

O valor de $\int_a^b f(t)dt$ representa uma soma de áreas entre a curva do gráfico de $y = f(t)$ e o eixo t, em que as áreas acima do eixo são computadas positivamente, e as áreas abaixo do eixo são computadas negativamente.

7.2 Exemplo: espaço percorrido e deslocamento

Em certo dia, quando à metade da distância entre sua casa e seu local de trabalho, Márcia percebeu que havia esquecido seus óculos para leitura, sendo obrigada a retornar. No final de sua viagem, seu deslocamento – distância entre casa e local de trabalho – não correspondeu ao espaço que foi percorrido, registrado no hodômetro do carro.

Introd_calc_Integral_2011.indd 35 30/03/2011 07:43:21

O deslocamento de um corpo em movimento linear corresponde à *variação acumulada* da posição deste corpo a uma taxa igual à velocidade do corpo. No entanto, a *variação total* da posição pode não corresponder ao espaço total percorrido pelo corpo. Supondo, para simplificar, que o trajeto de Márcia entre casa e trabalho fosse linear, seu retorno à sua casa correspondeu a deslocar-se em direção contrária à inicial. Este retorno é computado no valor do espaço percorrido; mas não o é no valor de seu deslocamento ao final da viagem. Situações como estas devem ser modeladas adequadamente, e o fazemos através dos sinais positivos e negativos que são associados à velocidade do objeto em movimento.

Interprete a função $y = v(t)$, cujo gráfico está a seguir, como que representando a velocidade de um corpo em movimento linear.

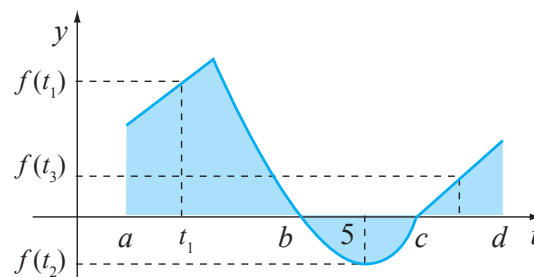



Figura 4: gráfico da velocidade de um corpo em movimento linear

Observe os intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$ em que $v(t) \geq 0$. Nestes, está representado o movimento da partícula movendo-se para a direita (convencionado como o sentido positivo). Em $[b,c]$, $v(t) \leq 0$. O significado é o da partícula mover-se em sentido contrário ao inicial, o que neste exemplo corresponde a mover-se para a esquerda. Ao calcularmos o deslocamento, que é a variação total da posição da partícula à taxa $y = v(t)$, estaremos:

- computando positivamente a *variação acumulada* nos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$, que corresponderam a movimento num mesmo sentido positivo;
- e excluindo a *variação acumulada* referente a $[b,c]$, que correspondem a um retorno, em relação à outra direção, escolhida como positiva.

Fazendo uso da interpretação da *variação acumulada* em termos de áreas sob a curva que representa a função velocidade, podemos escrever:

$$\textit{variação total} = \text{deslocamento} = \int_a^d v(t)dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{Espaço percorrido} = \int_a^d |v(t)|dt = A_1 + A_2 + A_3$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 36 30/03/2011 07:43:21

8) EXERCÍCIOS

8.1 (a) Determine o valor da *Integral Definida* $\int_{-1}^{3}(x-1)dx$, esboçando o gráfico de $y = x - 1$. Observe sua localização em relação ao intervalo $[-1, 3]$, cujos extremos são os limites de integração da *Integral Definida*.

(b) Se a proposta no item (a) fosse determinar a área entre o gráfico de $y = x - 1$, o eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 3$, como você procederia?

8.2 (a) Em dicionários específicos da área, o conceito de precipitação se refere à "libertação de água proveniente da atmosfera sobre a superfície da Terra". A forma mais comum de precipitação é a chuva. Para medir a precipitação total acumulada, em milímetros, durante um período de tempo, que pode ser de dias, meses ou anos, faz-se uso de instrumentos como o pluviômetro, no qual se registram as alturas, em milímetros (mm), do volume de água acumulado durante as chuvas.

Um conceito importante é o de *intensidade*. Ele registra a "razão entre altura no pluviômetro e duração da chuva" medido em horas ou minutos. Sua unidade de medida é *mm/h* ou *mm/min*. Ele representa, portanto, a taxa de variação da precipitação por unidade de tempo.[2]

A tabela a seguir registra a intensidade da chuva em uma certa região do país.[2]

t (*horas*)	0	3	6	9	12	15
$f(t)$ (*mm/hora*)	5	11	13	10	5	4

Avalie o valor de $\int_{0}^{15} f(x)dx$ utilizando a Soma à Esquerda, para a função $y = f(x)$ com alguns de seus valores dados na tabela anterior.

O que este valor representa no contexto descrito pela tabela?

(b) Avalie $\int_{0}^{15} f(x)dx$ utilizando a Soma à Direita para a função $y = f(x)$, cujo gráfico está representado na figura a seguir.

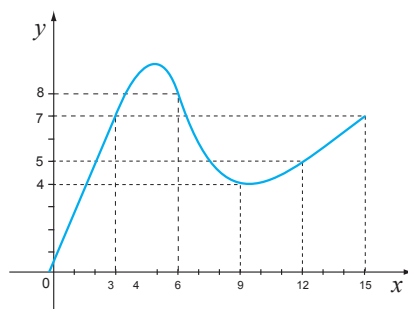



Figura 5: gráfico de $y = f(x),\ 0 \leq x \leq 15$

[2] Consulta ao site <www.cptec.inpe.br/~ensinop/méd_prec.html>.

Introd_calc_Integral_2011.indd 37 30/03/2011 07:43:22

(c) Calcule a área A limitada pela curva, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, o valor de $\int_a^d f(x)dx$, e as integrais $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_b^c f(x)dx$.

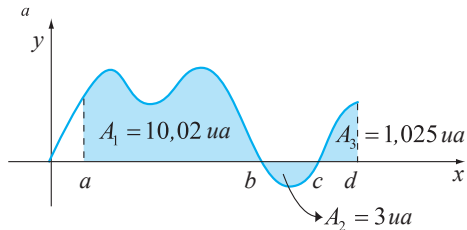



Figura 6: cálculo de integrais conhecidas as áreas

(d) Calcule as integrais indicadas, a partir das informações nas figuras a seguir

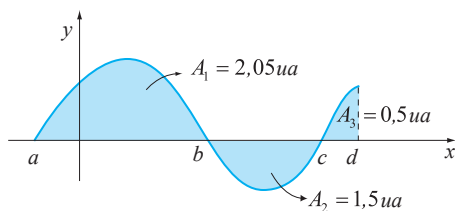



Figura 7: calcular $\int_a^c f(x)\,dx$

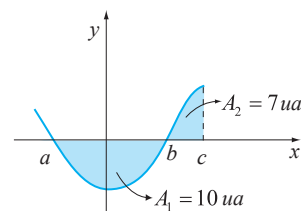



Figura 8: calcular $\int_a^c f(x)\,dx$

9) REFERÊNCIA

PINTO, M.; ARAÚJO, J. FERREIRA, C. *Cálculo I*. Educação a Distância. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

Introd_calc_Integral_2011.indd 38 30/03/2011 07:43:22

AULA 3

O Teorema Fundamental do Cálculo

OBJETIVO
Enunciar, demonstrar e utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo.

1) INTRODUÇÃO

Esta aula apresenta o Teorema Fundamental do Cálculo retomando os conceitos de *Integral Definida* e de *Integral Indefinida*, estudados em nossa Aula 2, e introduz os conceitos de *Integral Indefinida* e de *primitiva* de uma função.

Aqui, operacionalizamos os conceitos estudados e apresentaremos duas versões do Teorema Fundamental. Organizaremos uma primeira tabela de *primitivas* e discutiremos regras e propriedades para o cálculo de integrais.

As próximas aulas serão dedicadas ao estudo de técnicas de integração, importantes para encontrarmos a *primitiva* das funções com que viemos trabalhando.

2) O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA INTEGRAIS DE DERIVADAS

Na Aula 2, introduzimos a noção de *Integral Definida* $\int_a^b f(t)dt$. Na resolução de problemas específicos, a *Integral Definida* pode estar modelando uma *variação acumulada*[1] à taxa *f*, que corresponde à medida de uma área.

Aqui vamos enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1), que torna possível o cálculo de *Integrais Definidas*, e de *variações acumuladas*, de um modo alternativo ao cálculo das *Somas de Riemann*.

[1] Esta noção é tema da Aula 1.

Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)

Seja $y = f(t)$ contínua para $t \in [a,b]$.

Então $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, em que $F(t)$ é uma função tal que $\frac{dF}{dt} = f(t)$.

Veja como utilizar o teorema, nos exemplos a seguir.

2.1 Exemplo: cálculo da *Integral Definida*

A função $F(x) = x^3 - 2x$ é uma função cuja derivada é $3x^2 - 2$ (verifique!). Usando este fato e o Teorema Fundamental do Cálculo, somos capazes de calcular a integral $\int_0^1 3x^2 - 2dx$.

Identificando $F(x) = x^3 - 2x$ e $f(x) = 3x^2 - 2$ no enunciado do teorema, escrevemos:

$$\int_0^1 (3x^2 - 2)dx = F(1) - F(0) = \left[(1)^3 - 2(1)\right] - \left[(0)^3 - 2(0)\right] = [1-2] - [0] = -1$$

2.2 Notação e linguagem

Em resoluções de exercícios como o 2.1, é usual representarmos

$F(1) - F(0)$ por $\left[x^3 - 2x\right]_0^1$

$F(1)$ por $\left[x^3 - 2x\right]_{x=1}$ e

$F(0)$ por $\left[x^3 - 2x\right]_{x=0}$

Esta notação será utilizada em exemplos e problemas que envolvam o cálculo de *Integrais Definidas*. Veja como fazê-lo.

2.3 Exemplo: reescrevendo a resolução de $\int_0^1 (3x^2 - 2)dx$

$$\int_0^1 (3x^2 - 2)dx = \left[x^3 - 2x\right]_0^1 = \left[x^3 - 2x\right]_{x=1} - \left[x^3 - 2x\right]_{x=0}$$

$$= \left[(1)^3 - 2(1)\right] - \left[(0)^3 - 2(0)\right]$$

$$= [1-2] - [0] = -1.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 40 30/03/2011 07:43:22

2.4 Exemplo: cálculo da *variação acumulada* à taxa $y = f(t)$

Em uma reação química, uma substância reage a uma taxa $y = t^2\ mg/s$, no intervalo de tempo $[0,1]$, medido em segundos. Em miligramas, a *variação acumulada* ou concentração da substância neste intervalo de tempo é dada pela *Integral Definida* $\int_0^1 t^2 dt$. Uma função cuja derivada é t^2 pode ser $\frac{t^3}{3}$. Calculando a integral como no exemplo 2.3,

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0} = \frac{1}{3}.$$

2.5 Exemplo: cálculo da área limitada por $y = x^2$, pela reta $x = 1$ e pelo eixo x

Veja na Figura 1 o esboço da região que queremos medir.

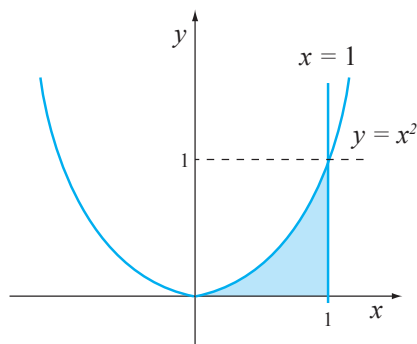



Figura 1: área limitada por $y = x^2$, por $x = 1$ e pelo eixo x

Por definição,[2] a medida da área corresponde ao valor de $\int_0^1 t^2 dt$. Então, o valor da área é $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, na unidade de medida que está sendo utilizada.

[2] Ver definição 6.1, na Aula 2.

Introd_calc_Integral_2011.indd 41 30/03/2011 07:43:23

2.6 Um esboço da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)

Preliminares:

Por definição, o valor de $\int_a^b f(t)dt$ é determinado através do $\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$.

Para calcularmos a expressão de $\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, de comprimentos iguais a $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. (Faça um desenho!)

Seja $a = t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots t_{i-1},\ t_i, \ldots$ uma subdivisão com as propriedades descritas acima.

Nossa proposta é calcular o valor $\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$. Observe que o enunciado do teorema relaciona este limite com a expressão de F, que é uma função cuja derivada é f. Por isso, para determiná-lo, nossa estratégia pressupõe uma releitura de cada uma das parcelas de $\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ em termos da função F.

Analisemos o primeiro intervalo da subdivisão, de extremos $t_0 = a$ e t_1. A parcela correspondente a ele no somatório em questão, $f(t_1).\Delta t$, pode ser entendida como uma estimativa[3] para a *variação acumulada* no intervalo considerado:

$f(t_1).\Delta t$ = taxa de variação × intervalo de tempo ≈ *variação acumulada* em $[t_0, t_1]$.

Em termos da função $F(t)$, a *variação acumulada* em $[t_0, t_1]$ é $\Delta F = (F(t_1) - F(t_0 = a))$.

Assim, a relação $f(t_1).\Delta t \approx \Delta F = (F(t_1) - F(t_0 = a))$ escreve a primeira parcela do somatório em termos da *primitiva* $F(t)$.

Numa subdivisão em que n é muito grande, o intervalo $[t_0, t_1]$ terá um comprimento muito pequeno, e a estimativa para ΔF pode ser muito boa. Em geral, essa estimativa ficará mais próxima do valor real à medida que aumentarmos o n.

[3] Isso porque a taxa de variação $f(t)$ (que não é constante) está sendo considerada constante e igual a $f(t_1)$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 42 30/03/2011 07:43:23

Do mesmo modo, no segundo subintervalo, estimaremos:

$f(t_2).\Delta t$ = taxa de variação $\times$ intervalo de tempo $\approx$ *variação acumulada* em $[t_1, t_2]$,

ou seja, $f(t_2).\Delta t \approx \Delta F = (F(t_2) - F(t_1))$.

Num intervalo genérico $[t_{i-1}, t_i]$,

$f(t_i).\Delta t \approx \Delta F = (F(t_i) - F(t_{i-1}))$.

Para o último intervalo da partição $[t_{n-1}, t_n = b]$,

$\Delta F = (F(t_n = b) - F(t_{n-1})) \approx f(t_n = b).\Delta t$.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t = f(t_1).\Delta t + f(t_2).\Delta t + ... + f(t_i).\Delta t + ... + f(b).\Delta t \approx$$

$$\Delta F = (F(t_1) - F(t_0 = a)) + (F(t_2) - F(t_1)) + ... +$$

$$(F(t_i) - F(t_{i-1})) + ... + (F(t_n = b) - F(t_{n-1})).$$

Cancelando os termos no segundo membro da igualdade (observe as expressões entre parênteses!), podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t \approx \Delta F = F(b) - F(a).$$

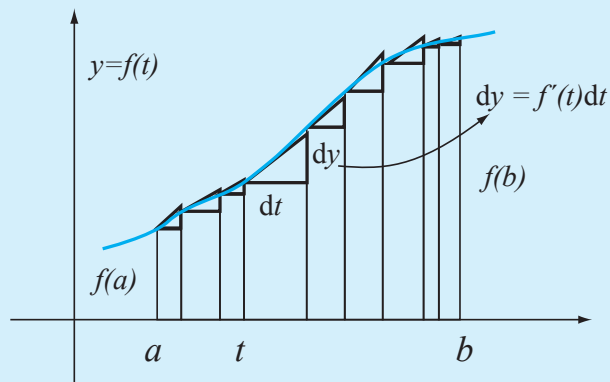
A noção de limite justifica a afirmação

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t = F(b) - F(a).$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 43 30/03/2011 07:43:24

De outro modo: partindo de $F(t)$, sua *variação total* no intervalo $[a,b]$, $F(b)-F(a)$ poderia ser obtida adicionando as *variações acumuladas* em cada subintervalo de sua partição:

$$\Delta F = (F(t_1)-F(t_0=a))+(F(t_2)-F(t_1))+...+$$
$$(F(t_i)-F(t_{i-1}))+...+(F(t_n=b)-F(t_{n-1}))$$

(*acumulando* (variação de) *alturas*! Investigue o desenho a seguir).

De fato, observe que, cancelando os termos no segundo membro da igualdade (veja as expressões entre parênteses!), podemos escrever $[a,b] = F(b)-F(a)$.

Podemos escrever de outra forma cada *variação de altura*:
$(F(t_i)-F(t_{i-1})) \approx f(t_i).\Delta t$.

Assim, *acumulando as alturas*,

$$\Delta F = F(b)-F(a) \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t.$$

Considerar n muito grande, ou seja, considerar $\lim\limits_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta t$ nos garante a igualdade. E completa a ideia da demonstração.

Introd_calc_Integral_2011.indd 44 30/03/2011 07:43:24

3) TABELA DE PRIMITIVAS

Os exemplos anteriores chamam nossa atenção para a importância de sabermos "desmanchar" a ação da derivada. Antes de prosseguirmos estudando meios para fazer isso, daremos uma definição que nomeia a função que desmancha a ação de uma derivada.

3.1 Definição

Uma função $F(t)$ é chamada *primitiva* ou *Integral Indefinida* de $y = f(t)$ caso $\frac{dF}{dt} = f(t)$.

Para $F(t)$ e $f(t)$ relacionadas deste modo, escrevemos:

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

O símbolo $\int f(t)dt$, que denominamos a Integral Indefinida de $f(t)$, representa uma função cuja derivada em relação a t é igual a $f(t)$.

Se você determinar uma função com esta propriedade, ou seja, uma primitiva $F(t)$ para a função $f(t)$, então $F(t) + C$, onde C é uma constante, também é uma *primitiva* porque $\frac{d(F(t)+C)}{dt} = \frac{d(F(t))}{dt} + \frac{dC}{dt} = \frac{d(F(t))}{dt}$, uma vez que derivada de constante é igual a zero. Isso quer dizer que:

Se $F(t)$ é uma *primitiva* de $f(t)$, então $F(t) + C$ também é uma *primitiva*, para qualquer constante C.

Por outro lado, em consequência do Teorema do Valor Médio, estudado na disciplina Introdução ao Cálculo Diferencial, sabemos que duas funções que possuem a mesma derivada $f(t)$ diferem por constante.

Assim:

Se $F(t)$ é uma *primitiva* de $f(t)$, então qualquer outra *primitiva* se escreve na forma $F(t) + C$, para alguma constante C.

Introd_calc_Integral_2011.indd 45 30/03/2011 07:43:24

Por isso escreveremos sempre: $\int f(t)dt = F(t) + C$, para $F(t)$ tal que $\frac{dF}{dt} = f(t)$. A expressão $\int f(t)dt = F(t) + C$ representa *todas* as *primitivas* da função $f(t)$.

Exercícios ao final das Aulas 1 e 2 e as expressões das *derivadas* que já conhecemos permitem organizar uma primeira tabela de primitivas, que podemos usar para resolver problemas como os dos exemplos:

Tabela 1

***Primitivas*, ou *Integrais Indefinidas*, de algumas funções elementares**

Função	*Primitiva* ou *Integral Indefinida*
$f(x) = c$, c constante real	$\int c\,dx = cx + k$
$f(x) = x^r$, r número real qualquer	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$, $r \neq -1$
$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + k$
$f(x) = sen\ x$	$\int senxdx = -cos\,x + k$
$f(x) = cos\,x$	$\int cos\,xdx = senx + k$
$f(x) = sec^2\,x$	$\int sec^2\,xdx = tan\,x + k$
$f(x) = cos\,ec^2 x$	$\int cos\,ec^2 xdx = -cot\,anx + k$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\,x + k$

As funções na Tabela 1 têm a expressão de sua *primitiva* facilmente determinada, a partir de regras de derivação conhecidas.

Mas, como proceder, no caso geral, com outras funções que estudamos?

Como comentamos, em consequência do Teorema do Valor Médio, sabemos que se determinamos uma *primitiva* F para a função f, qualquer outra *primitiva* se escreverá como $F + k$.

Resta saber *quando* podemos garantir que uma função tem uma *primitiva*.

Nas aulas que se seguem, estudaremos métodos para determiná-la em casos menos evidentes – as técnicas de integração.

Introd_calc_Integral_2011.indd 46 30/03/2011 07:43:25

4) O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (PARTE 2)

O Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2) nos diz *quando* é possível determinarmos uma função $A(x)$ cuja derivada é $f(x)$. Na verdade, o teorema nos apresenta um modo geral de determiná-la. Esse modo teórico, no entanto, não dispensa o estudo das técnicas de integração, que é o tema das próximas aulas.

4.1 Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2)

Seja $y = f(t)$ contínua para $t \in [a, b]$. Então, para qualquer x do intervalo temos:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Antes de demonstrar o teorema, vamos utilizá-lo em um exemplo, para derivar integrais.

4.2 Exemplo: derivar $\int_1^x (3sent - t^2)dt$

Para calcular a derivada $\frac{d}{dx}\int_1^x (3sent - t^2)dt$ usamos o teorema 4.1 com $f(t) = 3sent - t^2$ e $a = 1$, obtendo

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (3sent - t^2)\,dt = \left[3sent - t^2\right]_{t=x} = 3senx - x^2.$$

4.3 Notação e linguagem

Observe que usamos a letra t como variável de integração porque a letra x está sendo usada como limite superior de integração.

4.4 Demonstração do Teorema Fundamental (parte 2)

Vamos nos restringir ao caso em que a função $y = f(t)$ é positiva, e o valor x satisfaz $x > a$. Desse modo, a função

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

pode ser interpretada como a área da região, no plano ty, delimitada pelas retas $t = a$ e $t = x$, pelo eixo x e pelo gráfico da função $y = f(t)$. Veja a representação de $A(x)$ na Figura 2.

Introd_calc_Integral_2011.indd 47 30/03/2011 07:43:25

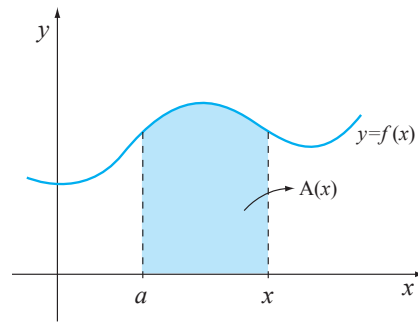



Figura 2: A região de área *A(x)*

Precisamos mostrar que $\frac{dA}{dx}$ é igual à altura $f(t)$, assinalada na Figura 2. Para derivar funções como $A(x)$, devemos usar a definição de derivada. Ou seja, devemos determinar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}$. Vamos usar o Teorema do Confronto para o cálculo deste limite. Os argumentos estão construídos a seguir.

Primeiro, observe as representações das áreas $A(x+\Delta x)$ e $A(x+\Delta x)-A(x)$ nas Figuras 3 e 4.

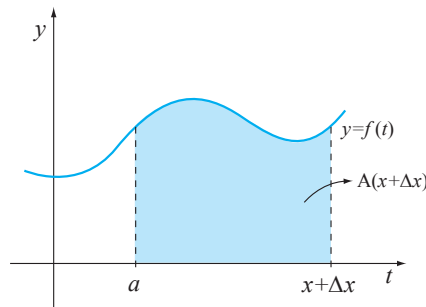



Figura 3: região de área $A(x+\Delta x)$

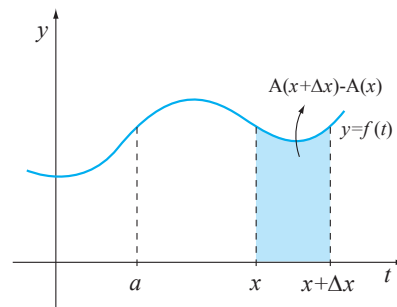



Figura 4: região de área $A(x+\Delta x)-A(x)$

Pelo Teorema dos Valores Extremos,[4] sabemos que existem valores m e M, correspondentes ao mínimo e máximo da função f em $[x, x+\Delta x]$, que permitem afirmar

$$m\Delta x < A(x+\Delta x)-A(x) < M\Delta x.$$

Verifique o que estamos afirmando, nas Figuras 5 e 6.

Para $\Delta x > 0$, podemos escrever que $m < \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} < M$, dividindo a última expressão por Δx.

A conclusão a seguir é fundamentalmente intuitiva:

explore as Figuras 5 e 6 e verifique que os valores m e M tendem para um único valor, $f(x)$, quando Δx tende a zero. Isso porque, neste caso, o intervalo entre x e $x+\Delta x$ tende para o ponto $t = x$.

[4] Ver o texto “Introdução ao Cálculo Diferencial”.

Introd_calc_Integral_2011.indd 48 30/03/2011 07:43:26

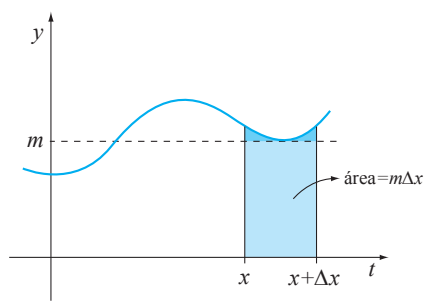



Figura 5: retângulo de área $m\Delta x$

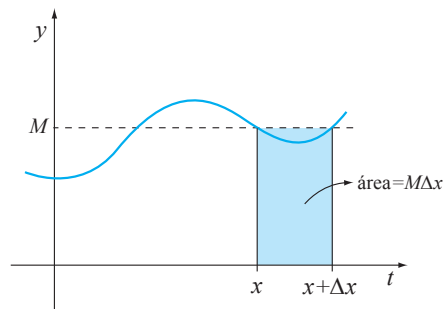



Figura 6: retângulo de área $M\Delta x$

Usando o Teorema do Confronto, podemos afirmar que
$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$, como queríamos demonstrar.

5) *INTEGRAL INDEFINIDA* DE SOMAS E PRODUTO POR CONSTANTE

Como proceder para calcular a *Integral Indefinida* da soma de duas funções ou da multiplicação de funções por uma constante? Iniciamos a discussão com exemplos.

5.1 Exemplo: a *Integral Indefinida* de uma soma de funções

Encontrar $\int (e^x + 4x^3)dx$ significa obter uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = e^x + 4x^3$. Retomando as regras de derivação, a derivada de e^x é e^x, e a derivada de x^4 é $4x^3$. Uma vez que a derivada de uma soma de funções (que admitem derivadas) é a soma das derivadas, escrevemos:

$$\frac{d(e^x + x^4)}{dx} = e^x + 4x^3.$$

Temos, então, $\int e^x + 4x^3 dx = e^x + x^4 + C$.

Ou seja, a *Integral Indefinida* da soma de funções é a soma das *Integrais Indefinidas*.

5.2 Exemplo: a *Integral Indefinida* do produto de uma função por constante

A derivada do produto de uma função por uma constante é igual à constante multiplicada pela derivada da função. Ou seja, $\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d}{dx}[f(x)]$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 49 30/03/2011 07:43:26

Para desfazermos a ação da derivada em $c.f(x)$, determinamos uma *primitiva* $F(x)$ para $f(x)$, e escrevemos $\int c.f(x)\,dx = c.F(x) + C$.

Por exemplo, $\int 3x dx = 3\int x dx = 3.\frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2}x^2 + C$.

Resumindo, é possível mostrarmos a proposição a seguir:

5.3 Proposição:

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ com *primitivas* $y = F(x)$ e $y = G(x)$. Então,

a) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + C$

b) $\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx = c.F(x) + C$

Esta proposição é válida para a soma de qualquer número finito de funções.[5]

[5] Quando a proposta for a de calcular a *Integral Indefinida* da soma ou diferença de três funções, digamos, f, g, h, podemos usar o fato de que a expressão $f + g + h$ pode ser reescrita, por exemplo, como $(f + g) + h$. Tal propriedade associativa da soma de funções permite a aplicação da proposição 5.3 duas vezes, reduzindo o cálculo da *Integral Indefinida* da soma de três funções ao caso admitido em seu enunciado. Em linguagem matemática,

$$\int (f+g+h)\,dx =$$
$$= \int [(f+g)+h]\,dx =$$
$$= \int (f+g)\,dx + \int h dx =$$
$$= \int f dx + \int g dx + \int h dx.$$

Com essa mesma estratégia, fazemos uso da proposição 5.3 para calcular a *Integral Indefinida* da soma de qualquer número finito de funções que admitem primitivas.

6) A *INTEGRAL INDEFINIDA* DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL QUALQUER

Seja a função polinomial

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde a_i's são números reais.

Utilizando a proposição 5.3a, temos:

$$\int p(x)\,dx = \int a_n x^n dx + \int a_{n-1}x^{n-1}dx + \ldots + \int a_2x^2dx + \int a_1xdx + \int a_0dx.$$

Utilizando 5.3b, segue que:

$$\int p(x)\,dx = a_n \int x^n dx + a_{n-1}\int x^{n-1}dx + \ldots + a_2\int x^2dx + a_1\int xdx + a_0\int dx.$$

Consultando a Tabela 1, afirmamos:

6.1 Proposição

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é uma função polinomial, então sua *Integral Indefinida* é

$$\int p(x)dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots + a_2\frac{x^3}{3} + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x + C.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 50 30/03/2011 07:43:27

6.2 Exemplo: a *primitiva* de $p(x)=12x^3-3x^2-8x+10$

$$\int\left(12x^3-3x^2-8x+10\right)dx=12.\frac{x^4}{4}-3.\frac{x^3}{3}-8.\frac{x^2}{2}+10.x+C$$

$$=3x^4-x^3-4x^2+10x+C$$ [6]

7) A *INTEGRAL INDEFINIDA* DE $Y = X^{-1}$

A regra $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ não faz sentido para o caso $n = -1$. Como calcular, então, a *Integral Indefinida* de $y = x^{-1}$?

Retomando as regras de derivação, a função $y=ln\,x$, com domínio $x>0$, tem derivada $y=\frac{1}{x}$, para todo valor de x neste mesmo domínio.

Isso quer dizer que uma *primitiva* para $y=\frac{1}{x}$, ou $y = x^{-1}$, para $x >0$, será $y=ln\,x$.

Interessante agora é explorarmos a função $y=ln(-x),\ x<0$.

Pela regra da cadeia, $\frac{d}{dx}\left[ln(-x)\right]=\frac{1}{-x}\times\frac{d}{dx}\left[-x\right]=\frac{1}{-x}\times-1=\frac{1}{x}$.

Isso quer dizer que $y=ln(-x)$ é uma *primitiva* de $y = x^{-1}$, definida para $x<0$.

Resumindo, $y=ln\,x$ é uma *primitiva* para $y = x^{-1}$, se $x < 0$; e $y=ln(-x)$ é uma *primitiva* para $y = x^{-1}$, se $x < 0$. Podemos então escrever que $ln|x|$ é uma *primitiva* para $y = x^{-1}$, para $x \neq 0$.

Em outras palavras, $\int x^{-1}dx=ln|x|+C$, para $x\neq 0$. Podemos acrescentar essa *Integral Indefinida* à nossa Tabela 1.

8) EXERCÍCIOS

1) Calcule as seguintes *Integrais Indefinidas*:

(a) $\int\left(e^x+1\right)dx$

(b) $\int dt$

(c) $\int\left(x^3-4x+senx\right)dx$

(d) $\int\frac{2}{x}dx$

(e) $\int\frac{3}{1+x^2}dx$

[6] Para você verificar se os cálculos estão corretos, basta derivar a última expressão à esquerda e verificar que coincide com a expressão interna ao sinal de integral. Quando você se sentir suficientemente familiarizado com o procedimento de encontrar *Integrais Indefinidas*, não será necessário escrever todo o desenvolvimento anterior. Escreva apenas o primeiro e o último lado da igualdade do desenvolvimento.

Introd_calc_Integral_2011.indd 51 30/03/2011 07:43:27

2) Encontre as seguintes *Integrais Definidas*:

(a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} senx dx$

(b) $\int_{1}^{2} x dx$

(c) $\int_{0}^{1} (t^3 - 1) dt$

(d) $\int_{3}^{5} 4 dt$

(e) $\int_{-1}^{8} 4u^{\frac{1}{3}} du$

3) Calcule a área limitada por $y = 1 - x^2$ e o eixo x. Faça um esboço.

4) Sabendo que $\frac{d}{dx} sen(x^2) = 2x\,cos(x^2)$, calcule $\int_{0}^{7} 2x\,cos(x^2)\,dx$.

9) REFERÊNCIAS

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Educação a Distância. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

SHENK, A. *Cálculo e geometria analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1985. v. 1.

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill Ltda.

STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 2001. v. 1.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books.

Introd_calc_Integral_2011.indd 52 30/03/2011 07:43:28

AULA 4

Técnicas de Integração
Integração por Substituição

OBJETIVO
Apresentar, discutir e utilizar o Método de Integração por Substituição.

1) INTRODUÇÃO

A Integração por Substituição é uma técnica (ou método) para resolver integral inspirada na Regra da Cadeia para derivadas. Por isso, compreender sua relação com a Regra da Cadeia torna mais significativa a manipulação algébrica que fazemos ao resolver integrais por esse método.

Iniciamos retomando a Regra da Cadeia $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$. Veja que essa expressão nos alerta para o fato de que desmanchar a ação da derivada em um produto de duas funções não corresponderá a desmanchar a ação da derivada em cada um dos fatores e fazer o produto. Em outras palavras, a integral de um produto de funções não é o produto das integrais (de cada um dos fatores). Esse fato contrasta com a regra de integração para a soma de duas funções. Em decorrência da regra da derivada da soma de funções, obtivemos a integral de uma soma $f + g$ somando a integral de *f* com a integral de *g*.

Nesta aula vamos discutir um primeiro método de integração que, em alguns casos, nos permitirá integrar o produto de duas funções. A intenção desta aula é também a de ajudar você a identificar se a técnica da substituição é adequada para a integral específica que você precisa resolver.

Iniciamos com um exemplo especial. Em seguida, enunciamos o Método ou Técnica de Integração por Substituição, finalizando com resolução e proposição de exercícios.

2) EXEMPLO: CÁLCULO DA INTEGRAL $\int 2cos(2x)dx$

Para resolver esta integral, vamos reescrever a função integrando $2cos(2x)$, com o objetivo de tornar sua integral imediata, consultando uma tabela de integrais.[1]

A ideia central é a de enxergar uma função composta, ou melhor, a derivada de uma função composta, na expressão que queremos integrar.

Para isso, retomamos a expressão da regra $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$ e identificamos o integrando[2] $2cos(2x)$ com a expressão do lado direito da igualdade.

Registrando a proposta:

$f'(g(x)) = cos(2x)$

$g' = 2$.

Você concorda que, em ambas as expressões, uma possibilidade para g é $g(x) = 2x$?

Para prosseguirmos com mais agilidade, introduzimos uma nova variável, escrevendo

$$u = g(x).$$

Em nosso caso, a integral é $\int 2cos(2x)dx$ e $u = g(x) = 2x$.

Lembrando que

$du = g'(x)dx = 2dx$,

podemos reescrever a integral na nova variável u introduzida:[3]

$\int 2cos(2x)dx = \int cos(2x).2dx = \int cos(u)du.$

Recorrendo a uma tabela de integrais, se necessário, verifique que podemos escrever:

$\int cos(u)du = sen(u) + C$.

Reescrevendo a resposta em termos de x, que é a variável original, chegamos a

$\int 2cos(2x)dx = sen(2x) + C$.

O método que utilizamos para resolver este exemplo recebe o nome de Integração por Substituição. Estudá-lo será útil para a resolução de muitas integrais como esta.

[1] Leia o que está sendo feito, fazendo o seu próprio registro com lápis e papel.

[2] Ver Aula 2. A função que está sendo integrada recebe o nome de integrando.

[3] Essa manipulação recebe o nome de *mudança de variáveis*. Observe que reescrevemos em termos de u uma integral cuja variável inicial é x. Veja que esta última integral você sabe calcular, ainda que tenha que recorrer a uma tabela.

Introd_calc_Integral_2011.indd 54 30/03/2011 07:43:28

3) A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Reapresentamos aqui a ideia básica utilizada no exemplo anterior, mas sem pensar em uma função em particular.

Se F é uma *primitiva* de f, então $\int \frac{dF}{dx}dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

Se $H = F \circ g$, então $\int \frac{d}{dx}\left(F\left(g(x)\right)\right)dx = F\left(g(x)\right) + C$.

Para a segunda integral, retomamos a regra da cadeia e expressamos a função no integrando como:

$\frac{d}{dx}\left(F\left(g(x)\right)\right) = F'\left(g(x)\right).g'(x) = f\left(g(x)\right).g'(x)$.

Levando na última integral,

$\int \frac{d}{dx}\left(F\left(g(x)\right)\right)dx = \int f\left(g(x)\right) . g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + C$.

A integral que nos é apresentada será da forma $\int f\left(g(x)\right).g'(x)dx$. Nela devemos identificar a regra da cadeia de uma composição de funções, e a *primitiva* F da função f.

Para isso, uma estratégia é a mudança de variáveis na integral que se quer calcular.

Fazendo $u = g(x)$, temos $du = g'(x)dx$. Uma vez introduzida esta variável $u = g(x)$, a nova integral fica na forma

$$\int f(u)du.$$

Uma vez que F é *primitiva* da função f, escrevemos

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Sintetizamos o método no quadro a seguir.

3.1 Técnica (ou Método) da Substituição

Se F é uma *primitiva* de f, então

$\int f\left(g(x)\right) . g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + C$. Tomando $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então $\int f(u)du = F(u) + C$.

Vamos trabalhar este procedimento novamente, no próximo exemplo.

3.2 Exemplo: determinar $\int 2x\cos\left(x^2\right)dx$, por substituição.

A proposta é enxergar a fórmula da Regra da Cadeia

$$f\left(g(x)\right).g'(x)$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 55 30/03/2011 07:43:29

na expressão do integrando. Neste exemplo, isso é possível escrevendo:

$$f(g(x)) = cosx^2$$

$$g'(x) = 2x.$$

Observe que uma possibilidade para a função g é $g(x) = x^2$.

Por esse motivo, fazemos a mudança de variáveis chamando $u = x^2$.

Segue que $du = 2xdx$.

Fazendo a mudança de variáveis na integral, percebemos mais facilmente a função f que deve ser integrada:

$$\int 2xcos(x^2)dx = \int cos(u)du = sen(u) + C .$$

Finalizamos escrevendo a resposta em termos da variável x, ou seja, fazendo $u = x^2$:

$$\int 2xcos(x^2)dx = sen(x^2) + C .$$

3.3 Notação e linguagem

Veja que fazendo uso da notação de diferencial tornamos a linguagem matemática concisa. Isso ajuda a automatizar a técnica.

Fazendo $u = g(x)$, lembre-se que $du = g'(x)dx$.

Nesta notação, a expressão $\int f(g(x)).g'(x)dx$ se reescreve $\int f(u).du$.

É nesta linguagem que vamos resolver os exercícios a seguir.

3.4 Exemplo: calcular $\int cos(2x)\, dx$.

Veja que essa integral é bem parecida com a do primeiro exemplo que estudamos nesta aula.

Você percebe a diferença entre elas? Apenas o fator 2, presente no integrando da integral do primeiro exemplo, não aparece aqui.

Se você retomar o desenvolvimento daquele exemplo, verá que este fator foi essencial para resolvermos a integral. No entanto, veja a seguir como sua ausência poderá ser contornada.

Resolvendo $\int cos(2x)\, dx$, fazemos

$$u = 2x.$$

Segue que $du = 2dx$.

Uma vez que $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, podemos escrever:

Introd_calc_Integral_2011.indd 56 30/03/2011 07:43:30

$$\int cos(2x)dx = \int 1.cos(2x)dx = \int \frac{1}{2}.2cos(2x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int cos(2x).2dx = \frac{1}{2}\int cosudu = \frac{1}{2}senu + C.$$

Reescrevendo em termos da variável x:

$$\int cos(2x)\, dx = \frac{1}{2} sen(2x) + C.$$

3.5 Exemplo: alternativa para determinar $\int cos(2x)dx$.

Faça $u = 2x$. Segue que $du = 2dx$.

Trabalhando com as diferenciais dx e du como se fossem quantidades finitas (lembre-se de que não são, mas que funciona dessa forma, porque a notação foi construída assim!), escrevemos

$$dx = \frac{du}{2}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integral, escrevemos:

$$\int cos(2x)\, dx = \int cosu\,.\,\frac{du}{2} = \int cosu\,.\,\frac{1}{2}\,.\,du = \frac{1}{2}\int cosudu.$$

Agora prosseguimos como foi desenvolvido no exemplo anterior.

4) RESOLVENDO INTEGRAIS

4.1 Exemplo: calcular $\int \sqrt{2x+1}dx$.

Faça $u = 2x+1$.

Segue que $du = 2dx$, ou seja,

$$\frac{du}{2} = dx.$$

Então, $\int \sqrt{2x+1}dx = \int \sqrt{u}.\frac{du}{2} = \int u^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}.du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C.$

Assim, $\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}.\sqrt{u^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C.$

4.2 Exemplo: calcular $\int sen(3x)dx$.

Fazendo $u = 3x$, temos $du = 3dx$. Ou seja, $dx = \frac{du}{3}$.

Então,

$$\int sen(3x)dx = \int senu.\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int senudu = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}cos3x + C.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 57 30/03/2011 07:43:30

4.3 Exemplo: calcular $\int (3x-3)^{10}\, dx$.

Faça $u = 3x - 3$. Então $du = 3dx$, ou seja, $dx = \frac{du}{3}$.

Assim,

$$\int (3x-3)^{10} dx = \int u^{10}.\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{10} du = \frac{1}{3}.\frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(3x-3)^{11}}{33} + C.$$

4.4 Exemplo: calcular $\int \frac{ln\, x}{x} dx$.

Este exemplo já é um pouco diferente dos demais. Que função chamaremos de u ?

Veja que uma das possibilidades será fazer $u = \ln x$. E, neste caso, $du = \frac{1}{x} dx$.

Observe que $\int \frac{ln\, x}{x} dx = \int ln\, x.\frac{1}{x} dx$.

Ou seja, com essa mudança de variáveis, a integral se escreve $\int \frac{ln\, x}{x} dx = \int ln\, x.\frac{1}{x} dx = \int udu$.

Alternativamente, você poderia também escrever: $dx = xdu$. E fazendo a mudança de variáveis na integral obtemos $\int \frac{ln\, x}{x} dx = \int \frac{u}{x}.\, xdu = \int udu$.

Chegamos à mesma integral, não?

Assim, $\int \frac{ln\, x}{x} dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(ln\, x)^2}{2} + C$.

Derive essa última expressão e veja se obtém mesmo a função integrando $\frac{ln\, x}{x}$.

4.5 Exemplo: encontrar $\int tan\, xdx$.

Por definição, $tan\, x = \frac{senx}{cos\, x}$. Uma vez que a derivada de $cos\, x = -senx$, é razoável tentarmos a mudança:

$u = cos\, x$, com $du = -senxdx$.

Então,

$$\int tan\, xdx = \int \frac{senx}{cos\, x} dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -ln|u| + C = -ln|cos\, x| + C.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 58 30/03/2011 07:43:31

4.6 Exemplo: resolver $\int x\sqrt{(6-x^2)}dx$.

Fazendo $u = 6 - x^2$, segue que $du = -2xdx$. De outro modo, $dx = \dfrac{du}{-2x}$.

Reescrevendo a integral,

$$\int x\sqrt{(6-x^2)}\,dx = \int x\sqrt{u}.\frac{du}{-2x} = \frac{-1}{2}\int (u)^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(6-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Antes de prosseguirmos, vale um comentário: o modo com que trabalhamos os exemplos nesta seção contém manipulações “arriscadas”. Para perceber o que isso quer dizer, observe a segunda expressão da integral, no desenvolvimento acima. Ela mistura em sua fórmula as variáveis x e u. Para que a aplicação do método de substituição seja possível, é necessário poder “cancelar” qualquer expressão em x, e escrever a integral exclusivamente em termos de u. Veja que neste e nos outros exemplos deu tudo certo. Este será o caso também do exemplo a seguir.

4.7 Exemplo: calcular $\int (2x^3-1)^5 . x^2dx$.

Fazendo $u = 2x^3 - 1$, segue que $du = 6x^2dx$. Ou seja, $dx = \dfrac{du}{6x^2}$.

Fazendo a mudança de variáveis na integral,

$$\int (2x^3-1)^5 .x^2dx = \int (u)^5 .x^2.\frac{du}{6x^2} = \frac{1}{6}\int u^5du = \frac{1}{6}.\frac{u^6}{6} + C = \frac{(2x^3-1)^6}{36} + C.$$

4.8 Exemplo: encontrar a *primitiva* de $\dfrac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Para usar a fórmula $\int senudu$, fazemos a mudança $u = \sqrt{x}$. Segue que $du = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, e então $2udu = dx$.

Assim,

$$\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{senu}{u}.2udu = 2\int senudu = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

4.9 Exemplo: calcular $\int cos^3x \,.\, senxdx$.

Veja que a forma do integrando sugere usarmos a integral de uma potência. Para isso, fazemos $u = cos\,x$. Segue que $du = -senxdx$.

A integral se escreve

$$\int cos^3x \,.\, senxdx = \int u^3 .-du = -\int u^3du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{(cos\,x)^4}{4} + C.$$

Agora, verifique se você entendeu a Técnica de Integração por Substituição, resolvendo os exercícios a seguir.

Introd_calc_Integral_2011.indd 59 30/03/2011 07:43:32

5) EXERCÍCIOS

1) Calcule as integrais, fazendo a substituição indicada:

(a) $\int x^2\left(2x^3-1\right)dx\,;\ u=2x^3-1$

(b) $\int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)}dx\,;\ u=x^2-4$

(c) $\int \frac{1}{\left(3x+2\right)^3}dx\,;\ u=3x+2$

(d) $\int \sqrt{x}\,cos\sqrt{x^3}\,dx\,;\ u=x^{\frac{3}{2}}$.

2) Calcule as *Integrais Indefinidas*:

(a) $\int \sqrt{4x-3}dx$

(b) $\int \left(3x-10\right)^5 dx$

(c) $\int 3v^2\sqrt{v^3-7}dv$

(d) $\int 3sen4xdx$

(e) $\int sen\left(1+x\right)dx$

(f) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^4}{\sqrt{x}}dx$

(g) $\int \frac{senx}{cos^4 x}dx$

(h) $\int \frac{1}{cos^2 7x}dx$

(i) $\int \frac{t^2+t}{\left(4-3t^2-2t^3\right)^8}dt$.

3) Encontre uma função que satisfaça as condições indicadas:

(a) $f'(x)=x\sqrt{x^2+5}$ e $f(2)=12$

(b) $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{3x+2}$, e $y=9$ se $x=2$.

6) REFERÊNCIAS

STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 2001. v. 1.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books.

Introd_calc_Integral_2011.indd 60 30/03/2011 07:43:32

AULA 5

Integração por Partes

OBJETIVO
Apresentar, discutir e utilizar o Método de Integração por Partes.

1) INTRODUÇÃO

A Integração por Partes é uma técnica (ou método) para resolver integrais concebida a partir da regra para derivar o produto de duas funções. Compreender a relação entre a Técnica de Integração por Partes e a Regra do Produto para derivadas torna mais significativa a manipulação algébrica que fazemos ao resolver integrais por este método.

Por isso, retomamos aqui a regra $(f.g)' = f'.g + f.g'$ e a discussão sobre o fato de que a "derivada de produtos não é produto de derivadas". Implicitamente no enunciado da Regra do Produto, podemos perceber que desmanchar a ação da derivada em um produto de duas funções não corresponderá em geral a desmanchar a ação da derivada em cada um dos fatores, e fazer o produto, como aconteceu com a soma de duas funções. Em outras palavras: a integral de um produto de funções não é o produto das integrais (de cada um dos fatores).

Nesta aula vamos discutir um método para integrar produtos de funções; e como muitas vezes ficamos sem saber qual a técnica de integração escolher para integrar uma função dada, a intenção desta aula é também apoiar você na busca por esta técnica para calcular integrais.

Iniciamos com um exemplo especial, discutindo como o procedimento de desmanchar a ação da derivada nas parcelas de um integrando pode ser utilizado para integrar um produto de funções.

Em seguida, enunciamos o Método de Integração por Partes, que passa então a ser utilizado na resolução de exercícios.

2) EXEMPLO: CÁLCULO DA INTEGRAL $\int xe^x dx$.

Veja como resolver esta integral reescrevendo adequadamente a função xe^x no integrando de modo a torná-la imediata, consultando uma tabela de integrais.[1] Você verá que vamos transformar uma integral que não sabemos resolver – $\int xe^x dx$ – em duas integrais que sabemos calcular.

Para isso, retomamos a regra $(f.g)' = f'.g + f.g'$ e identificamos a função xe^x com fg'.

Em outras palavras: vamos identificar o integrando xe^x com a última parcela da expressão do lado direito da igualdade $(f.g)' = f'.g + f.g'$, que é fg'.

Vamos chamar de g' a uma parte do integrando xe^x, que soubermos integrar. Isso porque será necessário encontrar a *primitiva* de g'. No caso deste exemplo, conseguiríamos determinar g escolhendo x ou e^x como g'. De fato, somos capazes de integrar ambas as funções!

Como uma primeira proposta, escolhemos:

$f = x \quad g' = e^x$.

Neste caso especial, veja como é fácil obtermos as demais componentes da fórmula $(f.g)' = f'.g + f.g'$:

$$f' = \frac{d(x)}{dx} = 1$$

$$g = \int g'dx = \int e^x dx = e^x + C.$$

Escolhendo a *primitiva* de g' correspondente a C=0, temos:

$f = x$

$g = e^x$

$f' = 1$

$g' = e^x$.

Daí, segue que:

$(f.g)' = (xe^x)'$

$f'.g = 1.e^x$.

Colocando estes dados na ordem dada pela fórmula

$(f.g)' = f'.g + f.g'$ obtemos:

$(xe^x)' = 1.e^x + xe^x$.

Esta última expressão pode ser reescrita como $xe^x = (xe^x)' - 1.e^x$.

[1] Leia o que está sendo feito, fazendo o seu próprio registro com lápis e papel.

Introd_calc_Integral_2011.indd 62 30/03/2011 07:43:33

Observe que a expressão à direita do sinal desta última igualdade é um outro modo de escrever a função xe^x, que queremos integrar. Esta reescrita será a "chave" para integrarmos a função.

Por meio dela, podemos reescrever a integral $\int xe^x dx$ que queremos calcular como:

$$\int xe^x dx = \int \left[\left(xe^x\right)' - 1.e^x \right] dx = \int \left(xe^x\right)' dx - \int 1.e^x dx.$$

As duas últimas integrais são imediatas,[2] e correspondem à integral que queremos calcular. De fato, um lado e o outro em uma igualdade, naturalmente, são iguais!

Assim, a solução procurada é

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$

A técnica que vamos estudar nesta aula tem como objetivo desenvolver soluções como esta.

3) A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Para desenvolvermos uma estratégia visando integrar outras funções, retomamos a expressão $(f.g)' = f'.g + f.g'$ agora escrita na notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = g(x).\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + f(x).\frac{d}{dx}\left[g(x)\right].$$

"Desmanchar" a ação da derivada no lado esquerdo da igualdade é o mesmo que desmanchá-la em seu lado direito.

Combinando a escrita da Regra do Produto para derivadas nas duas notações,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

e

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] dx = \int \left(f'(x).\, g(x) + f(x).\, g'(x)\right) dx \text{ ou}$$

$$f(x).\, g(x) = \int f'(x).\, g(x) dx + \int f(x).g'(x) dx.$$

Em síntese, podemos escrever:

$$\int f(x).\, g'(x) dx = f(x).\, g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Compare esta fórmula com a que resolveu o exemplo anterior. Você verá que é a mesma estratégia. Agora temos escolhas a fazer, para a reescrita. Assim, no caso do exemplo resolvido tínhamos $f = x$ e $g' = e^x$.

[2] Observe que a primeira integral é consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo, em sua primeira versão.

Introd_calc_Integral_2011.indd 63 30/03/2011 07:43:33

Vamos refletir sobre como fazer tais escolhas, resolvendo outros exemplos. Use lápis e papel e anote os cálculos ao estudar os exemplos nesta aula, enquanto você faz a leitura da explicação das decisões e dos desenvolvimentos.

3.1 Exemplo: encontrando $\int x\cos x dx$, por partes.

Como calcular $\int x\cos x dx$?

Observe que sabemos integrar isoladamente ambas as funções x e $\cos x$, partes da expressão do integrando $x \cos x$. Sendo assim, imite o primeiro exemplo e escolha:

$f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$.

Calculando $f(x)$ e $g'(x)$, obtemos:

$f'(x) = 1$ e $g(x) = \int \cos x dx = senx + C$.

Selecione a *primitiva* correspondente a $C=0$, e, utilizando expressão desenvolvida a partir da Regra do Produto, escreva

$$\int x\cos x dx = \int (xsenx)' dx - \int 1.\ senxdx.$$

Veja que você transformou uma integral que não sabíamos resolver – $\int x\cos x dx$ – em duas integrais que sabemos calcular.

Finalizando,

$$\int x\cos x dx = xsenx - \cos x + C.$$

Observe que, em ambos os exemplos, ao aplicarmos a técnica de integração por partes, optamos por tomar $f = x$. Se, ao invés, tivéssemos feito $g' = x$, também seríamos capazes de encontrar g. No entanto, feita esta última escolha, o expoente associado a x aumentaria ao calcularmos g, e a expressão a ser integrada no final ficaria mais complexa.

Confira este fato, no desenvolvimento de $\int xe^x dx$.

Fazendo

$f = e^x$ e $g' = x$,

segue que $f' = e^x$ e $g = \dfrac{x^2}{2}$.

Então, $\displaystyle\int xe^x dx = \int \left(e^x . \frac{x^2}{2}\right)' dx - \int \frac{x^2}{2} . e^x dx.$

Veja a última integral na expressão acima. Ela é a integral que efetivamente deveríamos calcular, e é mais complexa do que a que foi proposta.

Por esse motivo, sempre que for possível, devemos escolher o fator polinomial no integrando de modo a derivá-lo. Assim, fazemos recair o seu grau na integral que efetivamente iremos calcular após a reescrita.

Introd_calc_Integral_2011.indd 64 30/03/2011 07:43:34

Essa opção só não será feita caso a integral do outro fator do produto seja muito complexa, ou não seja possível de ser feita. Exemplos nesta aula exploram essa situação.

Antes de estudá-los, vamos introduzir uma notação que vai tornar a linguagem matemática concisa e ajudar a automatizar a técnica que estamos estudando nesta aula.

3.2 Notação e linguagem

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, lembre-se que $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$.

Com essa notação, a expressão

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

pode ser reescrita como

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Vamos utilizar essa linguagem apresentando uma solução alternativa para o exemplo anterior.

3.3 Exemplo: reescrevendo o cálculo de $\int xe^x dx$.

Retome a expressão $\int udv = uv - \int vdu$ e procure reescrever a integral $\int xe^x dx$.

Para isso, identifique $\int xe^x dx$. com a expressão $\int udv$, do lado esquerdo da igualdade. Temos que escolher, na expressão $xe^x dx$, quem chamaremos de u, e quem chamaremos de dv.

Como já discutimos, seria ótimo poder escolher $u = x$. Analise a outra expressão no integrando, porque você deverá integrá-la.

Neste exemplo vimos que é conveniente e possível escrevermos $dv = e^x dx$.

Assim, a expressão u será x.

A partir de agora, a resolução da integral começa propriamente.

Faça:

$u = x$ e $dv = e^x dx$. Segue que $du = dx$ e que $v = e^x$.

Utilizando a fórmula

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

escrevemos:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 65 30/03/2011 07:43:34

Segue que

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$

É com essa linguagem que vamos resolver os exemplos a seguir.

4) RESOLVENDO INTEGRAIS PELA TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

4.1 Exemplo: resolver $\int t\,sec^2 t dt$.

Como comentamos, devemos escolher dv, em primeiro lugar.

Veja as possibilidades que temos:

$1.dt$, tdt , $t\,sec\,tdt$, $t\,sec^2\,tdt$, $sec^2\,tdt$ e $sec\,tdt$.

Dentre estas, escolha a expressão mais complexa, que você sabe integrar.

Lembre-se de que sabemos integrar $\int sec^2 tdt$. Ao fazer essa escolha, consulte a tabela de integrais, se achar necessário!

Então, faça:

$$u = t \text{ e } dv = sec^2\,tdt.$$

Segue que $du = dt$; e $v = \int sec^2\,tdt$ será escolhida como $v = tan\,t$.

Utilizando a fórmula

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

escrevemos:

$$\int t\,sec^2 tdt = t.tan\,t - \int tan\,t.dt.$$

A última integral não é tão imediata como as que foram propostas nos dois primeiros exemplos, mas já foi resolvida na Aula 3, no exemplo 4.5.

Segue que

$$\int t\,sec^2 tdt = t.tan\,t - ln|cos\,x|^{-1} + C.$$

4.2 Exemplo: calcular $\int ln\,xdx$.

A função no integrando não se apresenta como um produto de funções, como nos exemplos anteriores.

No entanto, qualquer função $f(x)$ pode ser pensada como um produto de duas outras, sendo uma delas ela própria, quando for de nossa conveniência: basta escrevermos $f(x) = 1.f(x)$.

Neste exemplo, faça:

$$u = \ln x \text{, e então } du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = 1.\ dx \text{, e então } v = x.$$

Isso porque, como não sabemos integrar $\ln x$, que é exatamente a integral que devemos calcular, será necessário propor a sua derivação.

Utilizando nossa fórmula,

$$\int \ln x dx = \int 1.\ln x dx = x \ln x - \int x.\frac{1}{x}dx.$$

Observe que

$$\int x.\frac{1}{x}dx = \int 1.dx = \int dx = x + C.$$

Daí,

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C.$$

Vale a pena aqui fazer um comentário, antes do próximo exemplo.

Não há como descrever uma regra geral para aplicação de regras de integração. No entanto, podemos fazer uma releitura como a que fizemos de $\ln x$ como $1.\ln x$, para utilizar o Método de Integração por Partes, toda vez que não soubermos como integrar a função integrando, mas soubermos derivá-la.

Este é o caso de $y = \ln x$. Sua integral não está relacionada na tabela de integrais, mas conhecemos sua derivada. Usando o método de integração por partes, tentamos uma solução.

Isso não quer dizer que sempre obteremos a solução, mas é uma tentativa.

Vamos resolver outra *Integral Indefinida* por meio desse mesmo procedimento.

4.3 Exemplo: a *Integral Indefinida* de $y = \arctan x$.

Como calcular $\int \arctan x dx$? Aqui também sabemos derivar a função integrando (se necessário, recorra a uma tabela de derivadas).

Como no exemplo anterior, interprete

$$\arctan x = 1.\arctan x.$$

Faça:

$$u = \arctan x \text{ e } dv = 1.\ dx.$$

Segue que $u = \frac{1}{1+x^2}dx$, e então $v = x$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 67 30/03/2011 07:43:35

Usando a fórmula, podemos escrever que

$$\int arctan\, x dx = x\, arctan\, x - \int x.\frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Para finalizar, será necessário calcularmos

$$\int x.\frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Esta última integral pode ser resolvida pela Técnica da Substituição, estudada na Aula 3.

Para isso, faça $t = 1 + x^2$ e $dt = 2xdx$. Ou seja, $xdx = \frac{1}{2} dt$.

Diferentemente da linguagem que utilizamos na aula anterior, estamos usando a variável t porque u está sendo usada com outro significado, no Método de Integração por Partes.

Assim,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\, ln|t| + C.$$

Reescrevendo a expressão do lado esquerdo da igualdade na variável x, concluímos que

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Retomando a integral $\int arctan\, x dx$ que estávamos calculando,

$$\int arctan\, x dx = x\, arctan\, x - ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

4.4 Exemplo: a *Integral Indefinida* de $t^2 sent$.

Para calcular $\int t^2 sent dt$ faça:

$$u = t^2; \text{ e então } du = 2tdt;$$

$dv = sentdt$; e então $v = \int sentdt = -\cos t + C$.

Segue que

$$\int t^2 sentdt = -t^2 cos\, t - \int -2t\, cos\, tdt = -t^2 cos\, t + 2\int t\, cos\, tdt.$$

Veja que a integral do lado esquerdo da igualdade que ainda temos que resolver não é imediata! Observe, no entanto, que é uma questão de reutilizar o mesmo Método de Integração por Partes para calculá-la. E é isso que vamos fazer agora.

Para calcular $\int t\, cos\, tdt$, faça:

$u = t$; e então $du = dt$;

$dv = cos\, tdt$; e então $v = \int cos\, tdt = sent + C$.

Utilizando nossa fórmula obtemos

$$\int t\, cos\, tdt = tsent - \int sentdt = tsent + cos\, t + C.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 68 30/03/2011 07:43:36

E finalmente:

$$\int t^2 sentdt = -t^2 \cos t + 2(tsent + \cos t) + C.$$

Há dois comentários a fazer sobre este exemplo. O primeiro diz respeito à utilização repetida do Método de Integração por Partes, para solucionar essa integral. Isso pode funcionar, e neste caso, funcionou. Verifique que, se você estivesse calculando $\int t^3 sentdt$, você utilizaria o método três vezes! Tente resolver essa integral, como exercício. Se você obteve

$\int t^3 sentdt = -t^3 \cos t + 3\left[t^2 sent + 2t \cos t - 2sent\right] + C$, você acertou!

O segundo comentário reforça a discussão já iniciada nesta aula e diz respeito à escolha das expressões polinomiais no integrando como a variável auxiliar u. Por exemplo, em $\int t \cos tdt$ é conveniente tomarmos $u = t$. Isso porque, assim feito, derivaremos a expressão, e seu grau decairá na próxima integral que tivermos que calcular.

Estude o exemplo $\int x^2 e^x dx$ a seguir, prestando atenção na integral a ser resolvida que resultará da escolha $u = x^2$.

4.5 Exemplo: calcular $\int x^2 e^x dx$.

Faça $u = x^2$ e $dv = e^x dx$.

Então, $du = 2xdx$; e $v = \int e^x dx$ será considerado como $v = e^x$.

Assim, $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$.

Do exemplo 3.4, nesta aula, podemos escrever:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

4.6 Exemplo: calcular $\int e^x \cos xdx$.

Faça $u = \cos x$ e $dv = e^x dx$.

Veja que, a princípio, parece-nos que a escolha poderia muito bem ser outra.[3] E pode mesmo. Mas vamos tentar esta.

Então $du = -senxdx$; e $v = \int e^x dx$ será considerado como $v = e^x$.

Assim,

$$\int e^x \cos xdx = e^x \cos x - \int -e^x senxdx = e^x \cos x + \int e^x senxdx.$$

Observe que a integral que devemos resolver tem a mesma complexidade da que foi proposta.

Vamos propor sua resolução por partes, e você verá que recairemos na integral $\int e^x \cos xdx$.

[3] Podemos também propor $u = e^x$ e $dv = \cos xdx$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 69 30/03/2011 07:43:36

Devemos manter $dv = e^x dx$, que foi a mesma escolha feita no início. Senão, não funciona![4]

Resolvendo então $\int e^x senxdx$ com $dv = e^x dx$ e $u = senx$, segue que $v = e^x$ e $du = \cos xdx$. Então,

$$\int e^x \cos xdx = e^x \cos x + \int e^x senxdx = e^x \cos x + e^x senx - \int e^x \cos xdx.$$

Veja que a última integral do lado esquerdo é a mesma integral que queremos calcular, com sinal contrário. Pense nela como uma função, e passe-a para o lado esquerdo da igualdade:

$$2\int e^x \cos xdx = e^x \cos x + e^x senx = e^x \left(\cos x + senx\right).$$

Daí, escrevemos:

$$\int e^x \cos xdx = \frac{1}{2} e^x \left(\cos x + senx\right) + C .$$

4.7 Exemplo: encontrar $\int sec^3 xdx$.

As opções para dv são:

$$dx\ ,\ sec\, xdx\ ,\ sec^2 xdx\ ,\ sec^3 xdx.$$

Dentre elas, a expressão mais complexa que sabemos integrar é $\sec^2 xdx$.

Então, escrevemos $\int sec^3 xdx = \int sec\, x.\left(sec^2 x\right) dx$. Fazendo:

$$u = sec\, x \Rightarrow du = sec\, x \tan xdx$$

$$dv = sec^2 xdx \Rightarrow v = \tan x.$$

Integrando por partes:

$$\int sec^3 xdx = sec\, x \tan x - \int sec\, x \tan^2 xdx.$$

Utilizando a identidade $1 + \tan^2 x = sec^2 x$ segue que:

$$\int sec^3 xdx = sec\, x \tan x - \int sec\, x\left(sec^2 x - 1\right)dx =$$
$$= sec\, x \tan x - \int sec^3 xdx + \int sec\, xdx.$$

Adicionando $\int sec^3 xdx$ a ambos os membros da igualdade, chegamos a

$$2\int sec^3 xdx = sec\, x \tan x + \int sec\, xdx.$$

Aqui fazemos um parênteses no método que vem sendo utilizado e calculamos a última integral, por Substituição.

[4] Tente ver o que acontece se você fizer a escolha $u = e^x$ e $dv = senxdx$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 70 30/03/2011 07:43:37

4.8 Exemplo: cálculo da integral $\int sec\,xdx$.

Para calcular essa integral, usamos o artifício a seguir:

$$sec\,x=\frac{sec\,x\left(sec\,x+tan\,x\right)}{sec\,x+tan\,x}=\frac{sec^2 x+sec\,x\,tan\,x}{sec\,x+tan\,x}.$$

Assim reescrito o integrando, nossa integral fica:

$$\int sec\,xdx=\int\frac{sec^2 x+sec\,x\,tan\,x}{sec\,x+tan\,x}\,dx.$$

Fazendo $u=sec\,x+tan\,x\Rightarrow du=\left(sec\,x\,tan\,x+sec^2 x\right)dx.$

Então,

$$\int sec\,xdx=\int\frac{sec^2 x+sec\,x\,tan\,x}{sec\,x+tan\,x}dx=\int\frac{du}{u}=ln|u|+C=ln|sec\,x+tan\,x|+C.$$

Agora, retome o exemplo anterior e termine o cálculo da integral $\int sec^3 xdx$.

Os dois últimos exemplos são exemplos clássicos trabalhados quando ensinamos técnicas de integração. Sempre estão resolvidos nos livros de Cálculo e em nossas aulas, porque são exemplos complexos. No entanto, uma vez que você conhece sua solução, torna-se capaz de reproduzi-la.

4.9 Exemplo: calcular $\int x^2\,ln\,xdx$.

Fazer $u=x^2$ corresponde a tomar $dv=ln\,xdx$.

Nós já integramos o logaritmo, nesta mesma aula; no entanto, seria bom se pudéssemos evitar estes cálculos.

Por isso vamos escolher $u=ln\,x$ e $dv=x^2dx$, e ver o que acontece.

Veja aqui um exemplo em que contrariamos nossa orientação de escolher a expressão polinomial, aqui no caso, x^2, de modo a derivá-la.

Temos então $du=\frac{1}{x}dx$ e $v=\frac{x^3}{3}$, e

$$\int x^2\,ln\,xdx=\frac{x^3}{3}ln\,x-\int\frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}ln\,x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}ln\,x-\frac{x^3}{9}+C.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 71 30/03/2011 07:43:38

5) EXERCÍCIOS

Calcule as seguintes *Integrais Indefinidas*:

(a) $\int xe^{-x}dx$

(b) $\int xe^{2x}dx$

(c) $\int x^2 \cos xdx$

(d) $\int e^x senxdx$

(e) $\int x^4 \ln xdx$

(f) $\int \cos\sqrt{x}dx$

(g) $\int x \arctan xdx$

(h) $\int xsen4xdx$.

6) REFERÊNCIAS

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira, 2001. v. 1.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books.

Introd_calc_Integral_2011.indd 72 30/03/2011 07:43:38

AULA 6

Integração de funções trigonométricas
Substituição trigonométrica

OBJETIVO
Resolver integrais de funções trigonométricas. Apresentar, discutir e utilizar o método de substituição trigonométrica.

1) INTRODUÇÃO

Integrais de funções trigonométricas muitas vezes requerem abordagens especiais que valem a pena ser estudadas separadamente. Nesta aula vamos nos dedicar a alguns casos, dentre tais integrais.

Após aprendermos como integrar tais funções, passamos a estudar substituições que transformam integrandos em expressões envolvendo funções trigonométricas. Pelo que estudaremos nesta aula, ou pela tabela de integrais, saberemos como resolvê-las.

Esta aula será desenvolvida por meio de exemplos. Leia o que está sendo feito, fazendo seu próprio registro com lápis e papel.

2) INTEGRAIS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

2.1 Exemplo: calcular $\int sen^2 x dx$.

Para calcular esta integral vamos recorrer à identidade trigonométrica que escreve o cosseno do arco duplo, $cos 2x$, em termos das funções trigonométricas $cos x$ e $sen x$, como a seguir:

$$cos\, 2x = cos^2 x - sen^2 x.$$

Veja que podemos reescrever esta expressão obtendo

$cos\,2x = \left(1 - sen^2 x\right) - sen^2 x$, ou

$$cos\,2x = 1 - 2sen^2 x \text{, ou}$$

$$sen^2 x = \frac{1 - cos\,2x}{2}.$$

Veja que reescrevendo o integrando vamos calcular sua *primitiva* integrando duas funções, como a seguir:

$$\int sen^2 x dx = \int \left(\frac{1 - cos\,2x}{2}\right) dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int cos\,2x dx.$$

Uma *primitiva* para a primeira integral será $\frac{x}{2}$.

Já a segunda integral $\int cos\,2x dx$ será calculada pelo Método da Substituição, como na Aula 3.

Fazendo $u = 2x$, temos $du = 2dx$. Então,

$\int cos\,2x dx = \int (cos\,u) . \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int cos\,u du$. Veja que agora, para esta última integral, podemos recorrer à tabela de integrais.

Assim,

$$\int sen^2 x dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int cos\,2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} . sen 2x + C.$$

Nosso primeiro exercício proposto será o cálculo de $\int cos^2 x dx$. Para resolvê-lo, vamos retomar a mesma expressão $cos\,2x = cos^2 x - sen^2 x$ utilizada neste primeiro exercício.

Diferentemente, vamos escrever $cos^2 x$ em termos de $cos\,2x$. Tente fazer os cálculos!

2.2 Exemplo: encontre $\int sen^4 x dx$.

Observe a forma como vamos reescrever o integrando, de modo a recair numa integral como a do exemplo 2.1:

$$sen^4 x = \left(sen^2 x\right)^2 = \left(\frac{1 - cos\,2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2cos\,2x + cos^2 2x}{4}.$$

Assim,

$$\int sen^4 x dx = \int \frac{1 - 2cos\,2x + cos^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int cos\,2x dx + \frac{1}{4} \int cos^2 2x dx.$$

Veja agora que todas as três integrais você sabe calcular. A última destas integrais, $\int cos^2 2x dx$, como em nosso primeiro exercício,[1] vale $\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} sen 4x + C$.

[1] Este é o segundo exercício da lista ao final desta Aula.

Assim,

$$\int sen^4 xdx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos\,2xdx + \frac{1}{4}\int cos^2\,2xdx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sen4x + C.$$

Ou seja,

$$\int sen^4 xdx = \frac{3x}{8} - \frac{sen2x}{4} + \frac{sen4x}{32} + C.$$

As integrais de potências pares de seno e cosseno podem ser resolvidas como nos exemplos 1 e 2, isto é, utilizando fórmulas de arco duplo para $sen^2 x$ e $cos^2\,x$, e reduzindo os expoentes do integrando ao meio, até a potência 1. É claro que a situação fica cada vez mais complexa, à medida que a potência no integrando fica maior. Também é possível a dedução de uma fórmula para calcular essas *primitivas*, utilizando um método chamado Indução. Não nos dedicaremos a desenvolvê-la aqui nesta disciplina.

2.3 Exemplo: encontrando a *primitiva* de $sen^3 xdx$.

Para calcularmos $sen^3 xdx$, vamos escrever o integrando como a seguir:

$sen^3 x = \left(sen^2 x\right).\,senx = \left(1 - cos^2\,x\right)senx.$

Veja que, assim reescrito, somos capazes de calcular a integral, porque

$$\int sen^3 xdx = \int \left(1 - cos^2\,x\right)senxdx = \int \left(senx - cos^2\,x\,.\,senx\right)dx.$$

A primeira integral a ser calculada, $\int sen\,xdx$, está na tabela de integrais.

A segunda, $\int cos^2\,xsenxdx$, pode ser calculada por Substituição.[2]

Faça $u = cos\,x$, e então $du = -senxdx$.

Daí, $\int cos^2\,xsenxdx = \int u^2 . -du = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{sen^3 x}{3} + C.$

Desse modo,

$$\int sen^3 xdx = \int \left(senx - cos^2\,x\,.\,senx\right)dx = -cos\,x + \frac{sen^3 x}{3} + C.$$

[2] Veja a Aula 3.

Introd_calc_Integral_2011.indd 75 30/03/2011 07:43:39

2.4 Notação e linguagem

Vale observar mais uma vez o modo como operamos com a constante de integração C. Nós não "trocamos" o seu sinal quando substituímos essa constante na expressão da última integral. Isso pode ser considerado um abuso de linguagem, pois a rigor deveríamos fazê-lo, ou mudar o nome da constante, colocando, por exemplo, $-C = K$. A opção feita aqui, aceita pelos matemáticos, decorre do fato de que C é uma constante genérica que assume todos os valores reais, do mesmo modo que $-C$.

2.5 Exemplo: cálculo de $\int sen^5 x dx$.

Escreva: $sen^5 x = \left(sen^2 x\right)^2 . \, senx$.

Segue que $sen^5 x = \left(1 - cos^2 x\right)^2 .senx = \left[1 - 2cos^2 x + cos^4 x\right] senx$.

Assim,

$$\int sen^5 x dx = \int \left[1 - 2cos^2 x + cos^4 x\right] senxdx =$$

$$= \int senxdx - 2\int cos^2 xsenxdx + \int cos^4 xsenxdx.$$

Veja que a primeira integral $\int senxdx$ está na tabela de integrais, e é igual a $-cos\, x$.

A segunda e a terceira integrais são calculadas pelo Método da Substituição.

a) A integral $\int cos^2 xsenxdx$ já foi calculada em 2.3 e é igual a

$$-\frac{sen^3 x}{3} + C.$$

b) A integral $\int cos^4 xsenxdx$ será calculada fazendo

$$u = cos\, x \Rightarrow du = -senxdx.$$

Assim, $\int cos^4 xsenxdx = -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{sen^5 x}{5} + C.$

Por fim, escrevemos:

$$\int sen^5 x dx = \int senxdx - 2\int cos^2 xsenxdx + \int cos^4 xsenxdx = -cos\, x + 2\frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$$

As integrais de potências ímpares das funções seno ou cosseno podem ser resolvidas como nos exemplos 2.3 e 2.5. Em síntese, como o expoente n da potência é ímpar, $n - 1$ é par, o que permite utilizar a identidade trigonométrica $sen^2 x + cos^2 x = 1$ e reescrever o integrando de modo a utilizar o Método da Substituição.

Introd_calc_Integral_2011.indd 76 30/03/2011 07:43:40

Observe que as duas últimas integrais que calculamos são expressões para os integrandos que envolvem produtos de potências das funções seno e cosseno. Os exemplos a seguir tratam dessa expressão do integrando.

2.6 Exemplo: resolver $\int cos^3 xsen^4 xdx$.

Reescrevendo o integrando:

$$cos^3 xsen^4 x = cos\,x.cos^2 xsen^4 x = cos\,x\left(1 - sen^2 x\right)sen^4 x = \left(sen^4 x - sen^6 x\right)cos\,x$$

Qual a vantagem dessa reescrita do integrando? Veja que podemos calcular a última integral por substituição! De fato, a integral

$$\int cos^3 xsen^4 xdx = \int \left(sen^4 x - sen^6 x\right)cos\,xdx$$

pode ser calculada fazendo

$$u = senx \Rightarrow du = cos\,xdx$$

$$\int cos^3 xsen^4 xdx = \int \left(sen^4 x - sen^6 x\right)cos\,xdx =$$

$$= \int \left(u^4 - u^6\right) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{sen^5 x}{5} - \frac{sen^7 x}{7} + C.$$

Uma síntese de abordagens que funcionam para $\int sen^m x\,cos^n xdx$ está no quadro a seguir:

1- Se m for um número inteiro ímpar, escrevemos:

$$\int sen^m x\,cos^n xdx = \int sen^{m-1} x\,cos^n xsenxdx$$

Expressamos $sen^{m-1} x$ em termos de $cos\,x$ por meio da identidade $sen^2 x = 1 - cos^2 x$. Calculamos a integral reescrita usando o Método da Substituição, fazendo $u = cos\,x$, $du = -senxdx$.

2- Se n for um número inteiro ímpar, escrevemos:

$$\int sen^m x\,cos^n xdx = \int sen^m x\,cos^{n-1} x\,cos\,xdx.$$

Expressamos $cos^{n-1} x$ em termos de $senx$ por meio da identidade $cos^2 x = 1 - sen^2 x$. Calculamos a integral reescrita usando o Método da Substituição, fazendo $u = senx$, $du = cos\,xdx$.

3- Se m e n são pares, utilizamos as fórmulas de arco duplo para $sen^2 x$ e $cos^2 x$, reduzindo os expoentes à metade.

Introd_calc_Integral_2011.indd 77 30/03/2011 07:43:41

Restam comentários sobre integrandos da forma $tan^m x\,sec^n x$. Parecem complicados, não? Algumas dessas integrais nós já calculamos.

Por exemplo, $\int sec^2 x dx$ e $\int sec\,x\,tan\,x dx$ estão na tabela de integrais.

As integrais $\int tan\,x dx$ e $\int sec^3 x dx$ foram calculadas em aulas anteriores, como exemplos de aplicações do Método da Substituição, no caso da primeira, e Integração por Partes, no caso da segunda.

Um modo geral de integrá-los pode ser descrito em uma síntese muito semelhante à de integrandos da forma $sen^m x\,cos^n x$. Lembrando, é claro, a relação $tan^2 x + 1 = sec^2 x$ e que para

$$u = tan\,x \Rightarrow du = sec^2 x dx \text{, e}$$

$$u = sec\,x \Rightarrow du = sec\,x\,tan\,x dx.$$

Vamos resolver dois exemplos, explorando essas integrais.

2.7 Exemplo: calcular $\int tan^2 x\,sec^4 x dx$.

Podemos escrever:
$\tan^2 x \sec^4 x = \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x = \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x$.

Escrevendo $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$, temos

$$\int tan^2 x\,sec^4 x dx = \int tan^2 x\left(1+tan^2 x\right)sec^2 x dx =$$
$$= \int u^2\left(1+u^2\right) du = \int \left(u^2+u^4\right) du = \frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C.$$

Ou seja, $\int tan^2 x\,sec^4 x dx = \dfrac{tan^3 x}{3}+\dfrac{tan^5 x}{5}+C.$

2.8 Exemplo: encontrar a *primitiva* de $tan^3 x\,sec^5 x$.

Para calcular $\int tan^3 x\,sec^5 x dx$, escrevemos
$tan^3 x\,sec^5 x = tan^2 x\,sec^4 x(sec\,x\,tan\,x) = \left(sec^2 x - 1\right)sec^4 x(sec\,x\,tan\,x)$.
Fazendo $u = sec\,x \Rightarrow du = sec\,x\,tan\,x dx$, segue que

$$\int tan^3 x\,sec^5 x dx = \int \left(sec^2 x-1\right)sec^4 x(sec\,x\,tan\,x)dx =$$
$$= \int \left(u^2-1\right)u^4 du = \frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+C.$$

Assim,

$$\int tan^3 x\,sec^5 x dx = \frac{sec^7 x}{7}-\frac{sec^5 x}{5}+C.$$

3) SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Algumas integrais envolvem radicais de expressões algébricas que são simplificadas por meio de substituição por função trigonométrica, para efeito de cálculo de integrais.

Introd_calc_Integral_2011.indd 78 30/03/2011 07:43:42

Veja as expressões e respectivas substituições na tabela a seguir:

Tabela 1

Expressão no integrando	Substituição sugerida
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a sen\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\, tan\,\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\, sec\,\theta$

Essas substituições são feitas de modo que a restrição de cada expressão trigonométrica em seu domínio permita a definição de sua inversa. Ela será necessária para reescrevermos a expressão final da integração, em termos da variável inicial da integração. Vamos discutir cada caso, nos exemplos a seguir.

3.1 Exemplo: calcular $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Seguindo sugestão da primeira substituição na Tabela 1, vamos fazer $x = 2sen\theta$. Para que a função $2sen\theta$ possa ser invertida, consideramos θ variando no intervalo fundamental, ou seja, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Segue que

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4sen^2\theta} = \sqrt{4\left(1-sen^2\theta\right)} = 2\sqrt{cos^2\,\theta} = 2\left|cos\,\theta\right|.$$

Veja aqui uma importância do intervalo fundamental $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$: neste intervalo, $cos\,\theta \ge 0$, e podemos escrever $\sqrt{4-x^2} = 2\left|cos\,\theta\right| = 2\,cos\,\theta$.

Como neste exemplo a expressão indicada está no denominador do integrando, devemos considerar $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Para $x = 2sen\theta$, temos $dx = 2\,cos\,\theta d\theta$. Fazendo a substituição na integral, obtemos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{4sen^2\theta.2\,cos\,\theta}.2\,cos\,\theta d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{sen^2\theta}.\,d\theta.$$

Parece complicado, não? Mas, observando bem, esta é a integral de $csc^2\,\theta$, que está em nossa Tabela de Integrais.

Assim, $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{sen^2\theta}.\,d\theta = -\frac{1}{4}cot\,\theta + C.$

Introd_calc_Integral_2011.indd 79 30/03/2011 07:43:43

Para escrevermos a expressão na variável x, usamos a Figura 1:

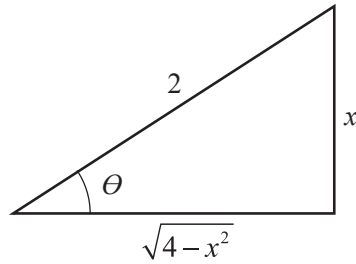



Figura 1: substituição $x = 2sen\theta$

A figura representa um triângulo retângulo, onde posicionamos o ângulo θ, o cateto oposto x e a hipotenusa 2. Veja que esses dados permitem escrever a expressão do outro cateto, que é $\sqrt{4-x^2}$.

Descrito este retângulo, observe que a expressão para $cot\,\theta$, que é definida como a razão entre o cateto adjacente ao ângulo θ e cateto oposto ao ângulo θ, escreve-se como

$$cot\,\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

Desse modo, $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\,cot\,\theta + C = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C.$

3.2 Exemplo: encontre $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}}\,dx.$

Da sugestão na Tabela 1, propomos a substituição $x = 4tan\,\theta$, no intervalo fundamental $-\frac{\pi}{2} < \pi < \frac{\pi}{2}$.

$$\sqrt{16+x^2} = \sqrt{16+16tan^2\,\theta} = \sqrt{16\left(1+tan^2\,\theta\right)} = 4\sqrt{sec^2\,\theta} = 4\left|sec\,\theta\right|.$$

No intervalo fundamental $-\frac{\pi}{2} < \pi < \frac{\pi}{2}$, temos $sec\,\theta > 0$.
Assim, $\sqrt{16+x^2} = 4\left|sec\,\theta\right| = 4\,sec\,\theta$. Com a substituição feita, $dx = 4\,sec^2\,\theta d\theta$.
Logo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{4\,sec\,\theta}.4\,sec^2\,\theta d\theta = \int sec\,\theta d\theta = ln\left|sec\,\theta + tan\,\theta\right| + C.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 80 30/03/2011 07:43:44

Veja agora a Figura 2, que nos ajuda a escrever a expressão do resultado final da integral. Uma vez que fizemos $x = 4tan\theta$, chamamos x ao cateto oposto a θ, e 4, ao cateto adjacente. Desse modo a hipotenusa do triângulo vale $\sqrt{16+x^2}$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}}dx = ln\left|sec\theta + tan\theta\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{16+x^2}}{4} + \frac{x}{4}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{16+x^2}+x}{4}\right| + C.$$

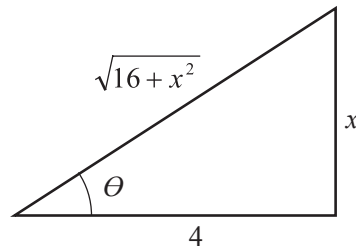



Figura 2: substituição $x = 4tan\theta$

3.3 Exemplo: calcule a *primitiva* de $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx.$

Da substituição $x = 4sec\theta$, segue que $dx = 4sec\theta tan\theta d\theta$, e então

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{16sec^2\theta - 16}}{4sec\theta}.4sec\theta tan\theta d\theta = \int \sqrt{16\left(sec^2\theta - 1\right)}.tan\theta d\theta = 4\int tan^2\theta d\theta.$$

A última integral não é difícil de ser resolvida. Lembrando que $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$, segue:

$$\int tan^2\theta d\theta = \int \left(sec^2\theta - 1\right)d\theta = tan\theta - \theta + C.$$

Então, $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx = 4\int tan^2\theta d\theta = 4tan\theta - 4\theta + C.$

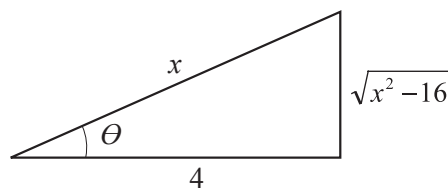



Figura 3: substituição $x = 4sec$

Introd_calc_Integral_2011.indd 81 30/03/2011 07:43:44

4) EXERCÍCIOS

1) Calcule as seguintes *Integrais Indefinidas*:

(a) $\int cos^2 x dx$

(b) $\int cos^4 x dx$

(c) $\int cos^3 x dx$

(d) $\int cos^5 x dx$

(e) $\int sen^3 x \, cos^4 x dx$

(f) $\int \sqrt{senx} \, cos^3 x dx$

(g) $\int sen^6 x dx$

(h) $\int sen^4 x \, cos^2 x dx$.

2) Resolva as integrais, por substituição trigonométrica:

(a) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} dx$

(d) $\int \frac{1}{\left(16+x^2\right)^2} dx$

(e) $\int x.\sqrt{x^2+9}$

(f) $\int \frac{1}{49+x^2} dx$

(g) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}} dx$.

5) REFERÊNCIAS

STEWART, J. *Cálculo*. 4. Ed. São Paulo: Pioneira, 2001. v. 1.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books.

Introd_calc_Integral_2011.indd 82 30/03/2011 07:43:45

AULA 7

Integração de funções racionais
O Método das Frações Parciais

OBJETIVO
Resolver integrais de funções racionais. Apresentar, discutir e utilizar o Método das Frações Parciais.

1) INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos discutir como integrar funções racionais,[1] (re)escrevendo-as como uma soma de funções "mais simples", que já sabemos integrar. Essa possibilidade de reescrever as funções racionais é garantida pelo Método das Frações Parciais.

Iniciamos com exemplos, seguidos pela discussão geral do método. Discutiremos as *quatro* situações que podem acontecer quando ele é aplicado, indicando, em cada um dos casos, como integrar a função que está sendo decomposta.

Esta aula será desenvolvida por meio de exemplos. Leia o que está sendo feito, fazendo seu próprio registro com lápis e papel.

[1] Lembre-se de que funções racionais são expressas como quocientes de polinômios. Ou seja, são funções da forma $y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x) \neq 0$ são polinômios.

2) EXEMPLO: CÁLCULO DA INTEGRAL $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx$.

Antes de calcular a integral, veja o que acontece ao adicionarmos as funções racionais $\frac{1}{x+1}$ e $\frac{2}{x-2}$.

Após reduzi-las a um denominador comum, temos:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = \frac{(x-2).1}{(x-2)(x+1)} + \frac{(x+1).2}{(x+1)(x-2)}.$$

Segue que

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{(x-2)+2(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x}{x^2-x-2}.$$

No cálculo da integral

$$\int\frac{3x}{x^2-x-2}dx,$$

podemos usar o fato de que a função $\frac{3x}{x^2-x-2}$ é a soma de $\frac{1}{x+1}$ e $\frac{2}{x-2}$, e escrever:

$$\int\frac{3x}{x^2-x-2}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2}{x-2}dx.$$

Estas duas últimas integrais nós sabemos calcular:[2]

$$\int\frac{1}{x+1}dx=ln|x|+C \text{ e } \int\frac{2}{x-2}dx=2ln|x-2|+C.$$

Segue que:

$$\int\frac{3x}{x^2-x-2}dx=ln|x|+2ln|x-2|+C.$$

O exemplo acima nos dá uma ideia para calcular $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$: se for possível, escreva a função racional $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ como soma de funções mais simples.

A proposta é a de decompor a "fração" $\frac{P(x)}{Q(x)}$ em uma soma de "frações irredutíveis", como no caso de frações numéricas. O Método das Frações Parciais nos afirma que, teoricamente, podemos decompor uma função racional $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ qualquer em soma de funções racionais "irredutíveis", de modo semelhante ao caso do primeiro exemplo.

3) EXEMPLO: CÁLCULO DA INTEGRAL $\int\frac{2}{(x^2-1)}dx$

No exemplo anterior, nosso ponto de partida foram duas funções racionais "irredutíveis" que adicionamos, obtendo como resultado a função $\frac{3x}{x^2-x-2}$.

Aqui, vamos tomar a função $\frac{2}{(x^2-1)}$ como ponto de partida, e pensar em como decompô-la em funções racionais "mais simples".

[2] Para a integral $\int\frac{1}{x+1}dx$, faça $u=x+1$; segue que $du=dx$ e $\int\frac{1}{x+1}dx=\int\frac{1}{u}du=$ $=ln|u|+C=ln|x|+C.$ A mesma estratégia resolve a integral $\int\frac{2}{x-2}dx$; neste caso, fazendo $u=x-2$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 84 30/03/2011 07:43:46

Veja que, para este caso particular, por inspeção, podemos escrever:

$$\frac{2}{\left(x^2-1\right)}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{-1}{(x+1)}.$$

A expressão à direita que escreve a função $\frac{2}{\left(x^2-1\right)}$ como soma de duas expressões "mais simples" é denominada *decomposição* de $\frac{2}{\left(x^2-1\right)}$ *em frações parciais*.

Para calcularmos $\int \frac{2}{\left(x^2-1\right)}dx$, escrevemos:

$$\int \frac{2}{\left(x^2-1\right)}dx=\int\left(\frac{1}{(x-1)}+\frac{-1}{(x+1)}\right)dx=\int\frac{1}{(x-1)}dx+\int\frac{-1}{(x+1)}dx.$$

As duas integrais à direita do sinal de igualdade podem ser resolvidas como no exemplo anterior. A soma de seu resultado corresponde à integral que queremos calcular.

Mas, como proceder em um caso geral, em que a decomposição em frações parciais não é tão visível? É para isso que estudamos o método a seguir.

4) O MÉTODO DAS FRAÇÕES PARCIAIS

O método conhecido como Método das Frações Parciais é uma técnica desenvolvida para expressar uma função racional qualquer $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ como soma de funções racionais mais simples, como nos dois exemplos anteriores.

Seja, então, $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional qualquer.

Para reescrevê-la por meio do Método das Frações Parciais, em primeiro lugar comparamos os graus dos polinômios P e Q, verificando se o grau do polinômio no numerador é menor do que o grau do polinômio no denominador.[3]

Caso isso não aconteça, dividimos os dois polinômios e escrevemos $y=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, onde o grau de R é menor que o grau de Q.[4]

[3] Quando o grau do polinômio $P(x)$ é menor do que o grau do polinômio $Q(x)$, dizemos que a função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função racional própria.

[4] Por exemplo, se $y=\frac{x^3+x}{x-1}$, vamos dividir o polinômio x^3+x por $x-1$, obtendo $y=\frac{x^3+x}{x-1}=\left(x^2+x+2\right)+\frac{2}{x-1}$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 85 30/03/2011 07:43:46

4.1 Exemplo: reescrevendo a função $y = \dfrac{x^3 + x}{x-1}$.

Após efetuarmos a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + x$ no numerador pelo denominador $Q(x) = x - 1$, podemos escrever

$$y = \frac{x^3 + x}{x-1} = \left(x^2 + x + 2\right) + \frac{2}{x-1}.$$

Veja que a função racional da expressão à direita satisfaz a condição "grau do polinômio no numerador é menor do que o grau do polinômio no denominador".

Observe também que, reescrevendo a função inicial desse modo, para encontrar a integral de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, integramos a função polinomial $S(x)$, que sabemos como fazer, ficando a questão sobre como integrar $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, onde o grau de R é menor que o grau de Q.

Retomamos o exemplo anterior:

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1}\,dx = \int \left[\left(x^2 + x + 2\right) + \frac{2}{(x-1)}\right] dx =$$

$$\int \left(x^2 + x + 2\right) dx + \int \frac{2}{(x-1)}\,dx.$$

Uma função polinomial qualquer $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sempre poderá ser reescrita assim.[5]

É por esse motivo que dizemos que, *sem perda de generalidade*, o método que vamos desenvolver se aplica a funções racionais *próprias* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ou seja, aquelas em que o grau de R é menor que o grau de Q.[6]

[5] A segunda integral, neste caso particular, sabemos integrar: $\int \frac{2}{(x-1)}dx = 2\ln|x-1| + C.$

[6] O Método das Frações Parciais só se aplica a essas funções racionais, mas elas são suficientes para dar conta do caso geral.

4.2 Teorema: Decomposição em Frações Parciais

Seja uma função $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, com grau de P menor que o grau de Q.

Então, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ pode ser escrito como uma soma de funções racionais de modo que:

a) se $(x - r)$ é um fator de $Q(x)$, uma das parcelas será da forma $\dfrac{A}{(x-r)}$;

Introd_calc_Integral_2011.indd 86 30/03/2011 07:43:47

b) se $(x-r)^n$ é um fator de $Q(x)$, as parcelas correspondentes serão da forma $\frac{A}{(x-r)}+\frac{A}{(x-r)^2}+\ldots+\frac{A}{(x-r)^n}$;

c) se (ax^2+bx+c), com discriminante negativo, é fator de $Q(x)$, então uma das parcelas será $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}$.

d) se $(ax^2+bx+c)^n$, com discriminante negativo, é fator de $Q(x)$, então uma das parcelas será

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

5) EXEMPLOS

5.1 Calcular $\int\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx.$

Veja que em $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ o grau do polinômio do numerador é menor do que o grau do polinômio no denominador. Podemos então aplicar o Método das Frações Parciais. Veja que o polinômio no denominador já está decomposto, e que as parcelas da decomposição são $(x-1)$ e $(x+2)$. Pelo teorema 4.1, item a), podemos determinar constantes A e B tais que

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}.$$

Para isso, vamos efetuar a soma das duas funções racionais do lado direito da igualdade, escrevendo:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{B(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)}.$$

Igualando os polinômios nos numeradores das duas frações racionais, temos

$Ax+Bx=0\,.\,x$, ou seja, $(A+B)\,.\,x=0\,.\,x$

$2A-B=1$

Este é um sistema de duas equações e duas incógnitas A e B. Como a primeira equação deve valer para todo x, podemos escrever

Introd_calc_Integral_2011.indd 87 30/03/2011 07:43:47

$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$.

Substituindo na segunda equação,

$2(-B) - B = 1 \Rightarrow -2B = 1 \Rightarrow B = \frac{-1}{2}$.

Segue que $A = \frac{1}{2}$.

Então,

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{-1}{2}}{(x+2)} \text{ e}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} dx + \int \frac{\frac{-1}{2}}{(x+2)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} ln|x-1| - \frac{1}{2} ln|x+2| + C$$

Usando propriedades de logaritmos,

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = ln|x-1|^{\frac{1}{2}} - ln|x+2|^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|^{\frac{1}{2}} + C$$

5.2 Encontre $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-2)} dx$.

Veja que em $\frac{x}{(x^2+1)(x-2)}$ o grau do polinômio do numerador é menor do que o grau do polinômio no denominador, e que o polinômio no denominador já está decomposto. As parcelas da decomposição são (x^2+1) e $(x-2)$. Pelo Teorema 4.1, itens a) e b), podemos determinar constantes A, B e C tais que

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{(Ax+B)(x-2)}{(x^2+1)(x-2)} + \frac{C(x^2+1)}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2 + C}{(x^2+1)(x-2)}.$$

Agrupando termos de mesmo grau,

$Ax^2 + Cx^2 = 0.x^2$ (1)

$-2Ax + Bx = 1.x$ (2)

Introd_calc_Integral_2011.indd 88 30/03/2011 07:43:48

$-2B+C=1 \qquad (3)$

$(1) \Rightarrow \; A+C=0 \Rightarrow A=-C$

$(2) \Rightarrow \; -2A+B=1 \Rightarrow B=1+2A$

Levando (1) em (2), segue que

$B=1-2C$.

De (3), $C=1+2B$.

Ou seja, $C=1+2(1-2C)$

$\Rightarrow 5C=3$

$\Rightarrow C=\dfrac{3}{5}$

Segue que $A=-\dfrac{3}{5}$ e $B=1-2.\dfrac{3}{5}=\dfrac{-1}{5}$.

Assim, a decomposição em frações parciais de

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{\frac{-3}{5}x-\frac{1}{5}}{(x^2+1)}+\frac{\frac{3}{5}}{(x-2)}.$$

A integral

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x-2)}dx=\frac{-3}{5}\int\frac{x}{(x^2+1)}dx-\frac{1}{5}\int\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{3}{5}\int\frac{1}{(x-2)}dx$$

$$=\frac{-3}{5}.\frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{5}arctan\,x+\frac{3}{5}ln\left|x-2\right|+C.$$

5.3 Decompor $\dfrac{3x-1}{x^4+x^2}$ em frações parciais.

$x^4+x^2=x^2(x^2+1)$. Pelo teorema 4.1 itens b) e c), temos

$\dfrac{3x-1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$. Segue que

$$\frac{3x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A(x.(x^2+1))}{x^2(x^2+1)}+\frac{B(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}+\frac{(Cx+D).x^2}{x^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)}.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 89 30/03/2011 07:43:49

Daí,

$(A+C)x^3 = 0.x^3$

$(B+D).x^2 = 0.x^2$

$A.x = 3x$

$B = -1.$

Então, $\dfrac{3x-1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{-3x+1}{x^2+1}.$

6) EXERCÍCIOS

Calcule as seguintes *Integrais Indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-6)(x+2)}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{(6x-11)}{(x-1)^2}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-x-1}dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{3}{x(x-1)}dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{49-x^2}dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-1)}dx$

7) REFERÊNCIAS

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill Ltda.

STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 2001. v. 1.

AULA 8

Área entre curvas

Retomando os conceitos de *Integral Definida* e área

Objetivo
Calcular áreas entre curvas usando o conceito de *Integral Definida*. Apresentar propriedades das *Integrais Definidas* e utilizá-las.

1) INTRODUÇÃO

Estamos concluindo o que planejamos discutir neste curso. Para este final, reservamos temas que achamos especialmente importantes e interessantes.

Nesta aula, e na próxima, retomamos os conceitos de *Integral Definida* e Área e *variação acumulada*, estudados em nossas primeiras aulas. Vamos utilizar as técnicas de integração que desenvolvemos até aqui para resolver problemas na matemática e em outras ciências, aplicando estes conceitos.

Finalizando o curso, estendemos na última aula a noção de *Integral Definida*. A proposta de extensão possibilita cálculos de áreas ou de variações acumuladas por funções que possuem assíntotas verticais no intervalo em que estamos trabalhando, possibilitando até mesmo trabalhar com intervalos de comprimento infinito.

Não há impedimento algum em antecipar estas três últimas aulas durante o curso – desde que se evitem exercícios ou questões cuja técnica para resolução ainda não tenha sido estudada. Optamos por deixá-las para o final, para que pudéssemos apreciar ideias e modelos, e com eles finalizar nosso curso, livres de preocupações com técnicas e procedimentos.

Iniciamos, então, esta aula, discutindo como calcular a área entre duas curvas usando a *Integral Definida*.

Esta aula será desenvolvida por meio de diversos exemplos. Leia o que está sendo feito, fazendo seu próprio registro com lápis e papel.

2) ÁREA

Veja um resultado da Aula 2:

Para $y = f(x)$, positiva em $[a,b]$, o valor da integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa a medida da área abaixo da curva gráfico de $y = f(x)$, acima do eixo x, e entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Vale lembrar que como a medida de área é positiva, uma definição como esta foi possível porque $\int_a^b f(x)dx$, neste caso, é positiva. Em outras palavras:

2.1 Propriedade

Para $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, uma integral como esta é calculada assim:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F \text{ é uma primitiva de } f.$$

Observe uma região como as que estamos discutindo, na Figura 1.

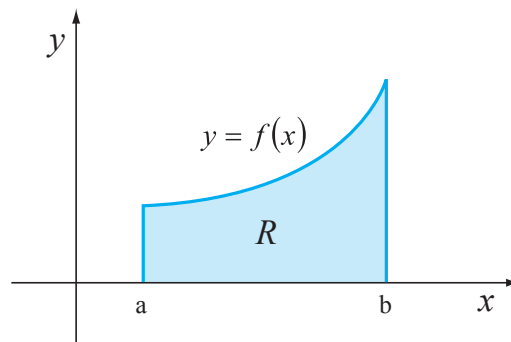



Figura 1: região entre $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, onde $a<b$

Introd_calc_Integral_2011.indd 92 30/03/2011 07:43:50

Analise agora a Figura 2. Como calcular a área da região que tem como fronteiras as curvas representadas no esboço?

Usando a definição 6.1, uma proposta pode ser: calcular a área entre, $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, e a área entre $y = g(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, subtraindo esta última da primeira. Em linguagem matemática, a proposta se escreve

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \big(F(b) - F(a)\big) - \big(G(b) - G(a)\big)$, onde F e G são primitivas de f e g, respectivamente.

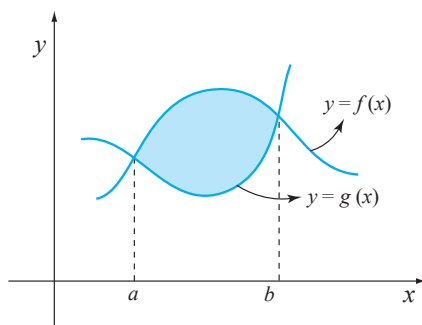



Figura 2: área com fronteiras $y = f(x)$ e $y = g(x)$

2.2 Exemplo: área da região com fronteiras $y = x^2$, $y = x$, $x = 1$ e $x = 2$.

Veja o esboço desta região, na Figura 3.

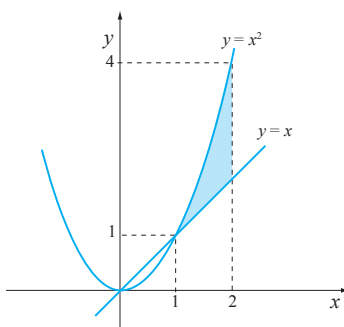



Figura 3: região com fronteiras $y = x^2$, $y = x$, $x = 1$ e $x = 2$

Pela proposta feita, para determinarmos a área da região, calculamos[1]

$$A = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

unidades de área.

[1] Lembre-se de que a notação que utilizaremos já foi introduzida.

Introd_calc_Integral_2011.indd 93 30/03/2011 07:43:50

2.3 Exemplo: região com fronteiras $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Observe a Figura 4. Para obtermos a área da região com fronteiras $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, será necessário identificarmos as interseções das curvas gráfico de $y = x^2$ e de $y = \sqrt{x}$.

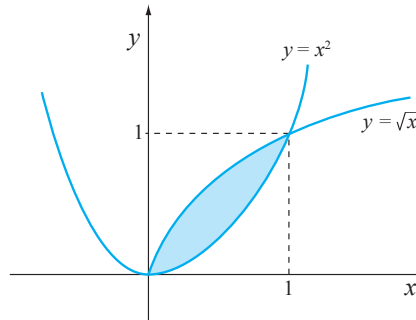



Figura 4: região com fronteiras $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Para isso resolvemos a equação $x^2 = \sqrt{x}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos $x^4 = x$, ou

$$x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^3 = 1.$$

Então, as interseções entre as duas curvas acontecem nos pontos de abscissas $x = 0$ e $x = 1$. Assim,

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ unidades de área.}$$

Agora, retome a expressão que escrevemos na página anterior:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \left(F(b) - F(a)\right) - \left(G(b) - G(a)\right),$$ onde F e G são primitivas de f e g, respectivamente.

Veja que o segundo membro da igualdade pode ser reescrito como

$$\left(F(b) - F(a)\right) - \left(G(b) - G(a)\right) = \left(F(b) - G(b)\right) - \left(F(a) - G(a)\right) =$$
$$= (F - G)(b) - (F - G)(a)$$

Uma vez que $F - G$ é a primitiva de $f - g$, o último membro da última igualdade vale

$$(F - G)(b) - (F - G)(a) = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Veja que esta expressão foi obtida comparando membros de igualdades que são todos iguais a $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Daí segue a propriedade:

2.4 Propriedade

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$.

Então, $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

2.5 Exemplo: utilizando a propriedade 2.4

Usando a propriedade 2.4 podemos reescrever as expressões das áreas nos exemplos 2.1 e 2.2, respectivamente, como

$A = \int_1^2 (x^2 - x)dx$ e $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx.$

Essa nova forma de escrever é mais concisa, e ajuda na discussão que faremos a seguir.

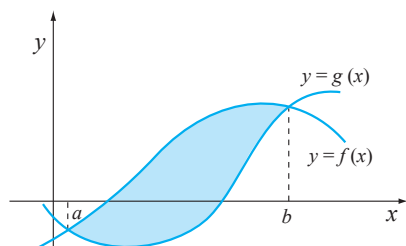



Figura 5: área limitada por f e g

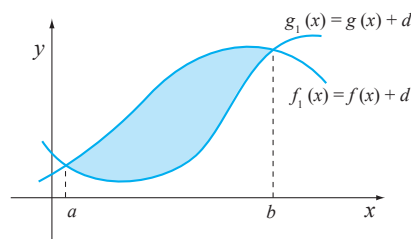



Figura 6: área limitada por $f + d$ e $g + d$

Observe as Figuras 5 e 6. A área hachurada é a mesma em ambas as figuras, pois suas fronteiras são idênticas: as curvas na Figura 6 são gráficos de funções f_1 e g_1 que correspondem a translações de f e g por um mesmo fator constante $d > 0$. Em linguagem matemática,

$f_1(x) = f(x) + d$

$g_1(x) = g(x) + d.$

Veja que não podemos abordar a questão de cálculo da área com fronteiras f e g como nos exemplos 2.1 e 2.2. Essas funções, representadas na Figura 5, não são positivas, e então não podemos utilizar a definição 6.1.

No entanto, podemos utilizar a definição 6.1 no segundo caso, representado na Figura 6, em que as fronteiras da região são as funções f_1 e g_1.

Podemos escrever:

$$A = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b g_1(x)\,dx = \int_a^b \left(f_1(x) - g_1(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left[\left(f(x)+d\right) - \left(g(x)+d\right)\right]dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 95 30/03/2011 07:43:52

Essa discussão se resume no seguinte teorema:

2.6 Teorema

Se f e g são contínuas, e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então a área A da região com fronteiras f e g, $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

3) EXEMPLOS

Para calcular a área A de uma região R, é sempre bom fazer um esboço, em primeiro lugar. Um esboço de R nos ajuda a confirmar que a função f descreve a fronteira superior da região e que a função g descreve a fronteira inferior. Ou seja, é útil para confirmar a desigualdade $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Feita essa análise, usamos a fórmula

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

3.1 Exemplo: área da região R com fronteiras $y + x^2 - 9 = 0$ e $y + 2x - 6 = 0$.

A Figura 7 representa a região R deste exemplo. Veja que a fronteira superior está definida sobre o gráfico de $y + x^2 - 9 = 0$, ou seja, de $y = 9 - x^2$, que funcionará como a nossa função f, neste caso. Já a fronteira inferior é o gráfico de $y = 6 - 2x$.

Feito isso, vamos calcular a interseção das duas curvas, determinando assim os limites de integração. Para tal, fazemos

$6 - 2x = 9 - x^2$, ou

$x^2 - 2x - 3 = 0$.

As raízes desta equação são as abscissas $x = -1$ e $x = 3$ dos pontos de interseção das curvas.

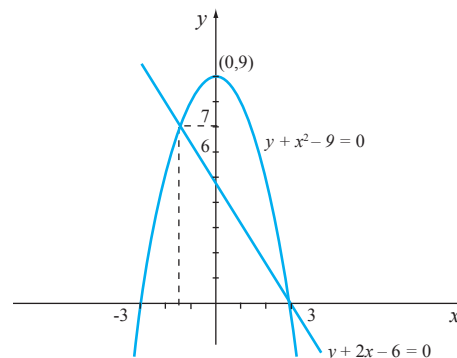



Figura 7: região R com fronteiras $y + x^2 - 9 = 0$ e $y + 2x - 6 = 0$

Introd_calc_Integral_2011.indd 96 30/03/2011 07:43:52

Então a área da região R será dada por

$$\int_{-1}^{3}\left[\left(9-x^2\right)-\left(6-2x\right)\right]dx=\int_{-1}^{3}\left[3+2x-x^2\right]dx=\left[3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left(3.3+3^2-\frac{(-1)^3}{3}\right)-\left(3.-1+(-1)^2-\frac{(-1)^3}{3}\right)$$

A resposta será $A(R)=22$ unidades de área.

3.2 Notação e linguagem

Não é usual, dentre os matemáticos, apresentar o resultado de uma *Integral Definida* com uma referência a unidades de medida que eventualmente ela pode estar representando. Embora em casos concretos de modelagem matemática as unidades possam ser explícitas ao final, referências a unidades de medida são, em geral, excluídas dos desenvolvimentos e manipulações algébricas. Decisões como estas agilizam as manipulações simbólicas; e este é um dos motivos pelos quais a eficiência fica garantida. Por outro lado, tais decisões distanciam o conhecimento matemático da sua referência ao mundo, contribuindo, assim, para que seus usuários percebam-na como muito abstrata.

Nos exemplos a seguir, vamos excluir referências a unidades de medida. Afinal, a demanda é também por introduzir e conhecer a cultura dos matemáticos. A reflexão anterior tem a intenção de contribuir para que esta introdução aconteça de forma crítica.

3.3 Exemplo: área da região R com fronteiras $y-x=2$, $y-x^2=0$, $y+x=0$

Veja o esboço da região, na Figura 8. Nele já estão situadas as coordenadas dos pontos de interseção das curvas, que são (–1,1), (0,0) e (2,4).

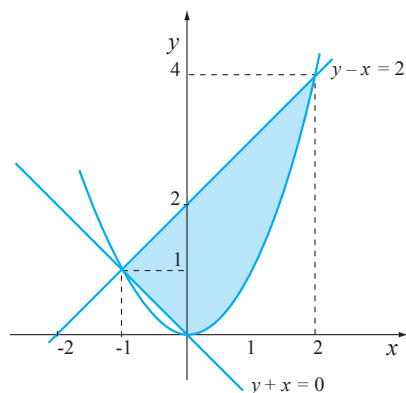



Figura 8: região R com fronteiras $y-x=2$, $y-x^2=0$, $y+x=0$

Veja que para x no intervalo $[-1,0]$ as fronteiras da região R_1 são $y-x=2$, $y+x=0$ e $x=0$.

Para x no intervalo $[0,2]$, as fronteiras da região R_2 são $y-x=2$, $y-x^2=0$ e $x=0$.

Se medirmos as áreas de R_1 e de R_2 separadamente, podemos utilizar a *Integral Definida*.

Por fim, a área da região R com fronteiras $y-x=2$, $y-x^2=0$, $y+x=0$ será obtida adicionando as áreas de R_1 e R_2.

$$A(R_1)=\int_{-1}^{0}[(2+x)-(-x)]dx=\left[2x+x^2\right]_{-1}^{0}=0-\left(2.-1+(-1)^2\right)=1$$

$$A(R_2)=\int_{0}^{2}[(2+x)-(x^2)]dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\left(2.2+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

Por fim, $A(R)=A(R_1)+A(R_2)=1+\frac{16}{3}=\frac{20}{3}$.

Este exemplo ilustra a necessidade de subdividir a região R em sub-regiões. Isso acontece quando as fronteiras superior e/ou inferior da região não se descrevem por meio de uma única função. Veja que neste exemplo a fronteira inferior foi constituída por $y+x=0$ para x em $[-1,0]$ e $y-x^2=0$ para x em $[0,2]$.

3.4 Exemplo: região com fronteiras $f(x)=senx$ e $g(x)=cos\,x$, para x em $[0,2\pi]$

Veja a região na Figura 9. Embora as fronteiras sejam descritas por duas funções, as fronteiras superior e inferior são distintas, a partir do segundo ponto de interseção. Para determinar a área da região R, vamos determinar este ponto de interseção e subdividir a região em três sub-regiões R_1, R_2 e R_3.

Para x em $[0,2\pi]$, as funções $f(x)=senx$ e $g(x)=cos\,x$ são iguais quando

$cos\,x=senx \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ e $x=\frac{5\pi}{4}$. Localize os pontos com esta abscissa na figura a seguir.

Introd_calc_Integral_2011.indd 98 30/03/2011 07:43:53

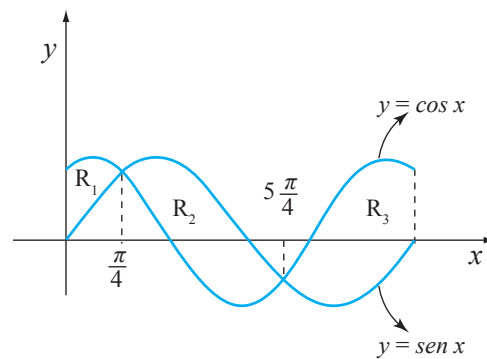



Figura 9: região com fronteiras $f(x) = senx$, $g(x) = cos\,x$, para x em $[0,2\pi]$, $x = 0$ e $x = 2\pi$

$$A(R_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - senx)\,dx = [senx + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (sen0 + \cos 0) = \sqrt{2} - 1$$

$$A(R_2) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (senx - \cos x)\,dx = [-\cos x - senx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\cos\frac{5\pi}{4} - sen\frac{5\pi}{4} - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$A(R_3) = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - senx)\,dx = [senx + \cos x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = sen2\pi + \cos 2\pi - \left(sen\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

Assim, $R = R_1 + R_2 + R_3 = 1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$.

O procedimento de subdividir o intervalo de integração $[-1,2]$ em dois intervalos para o cálculo da área da região R, que é intuitivamente válido no caso de áreas, vale também em geral. Confira como pode ser verificado:

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f. Se c é um ponto qualquer no intervalo (a,b), podemos escrever:

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Agora, adicione ambos os segundos membros das duas expressões acima:

$$F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Este resultado pode ser resumido na proposição a seguir.

3.5 Proposição

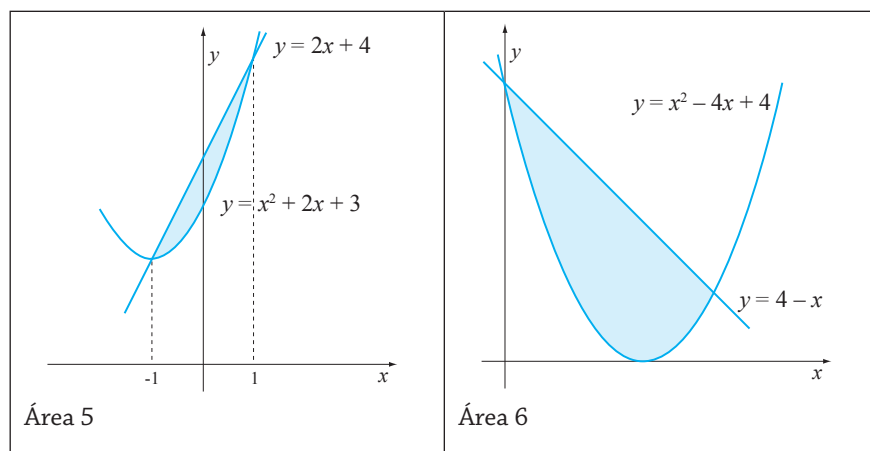
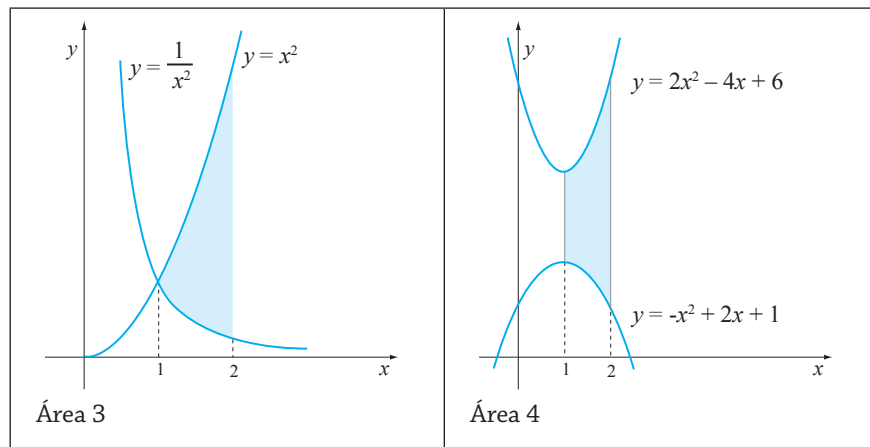
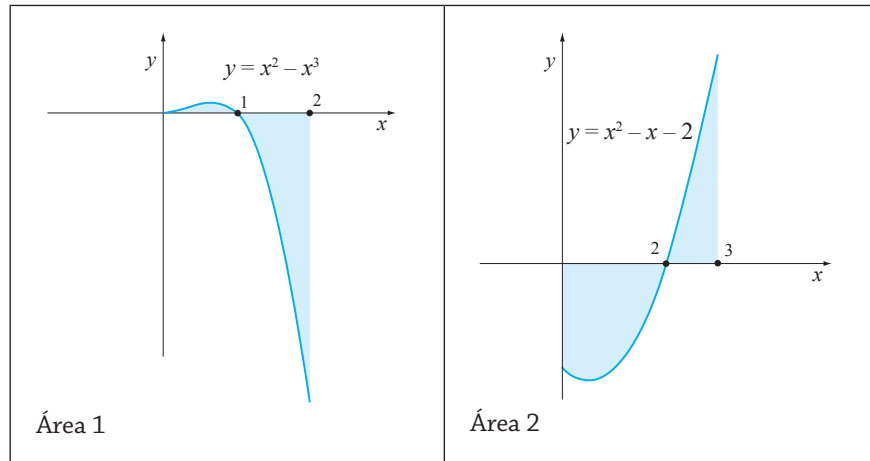
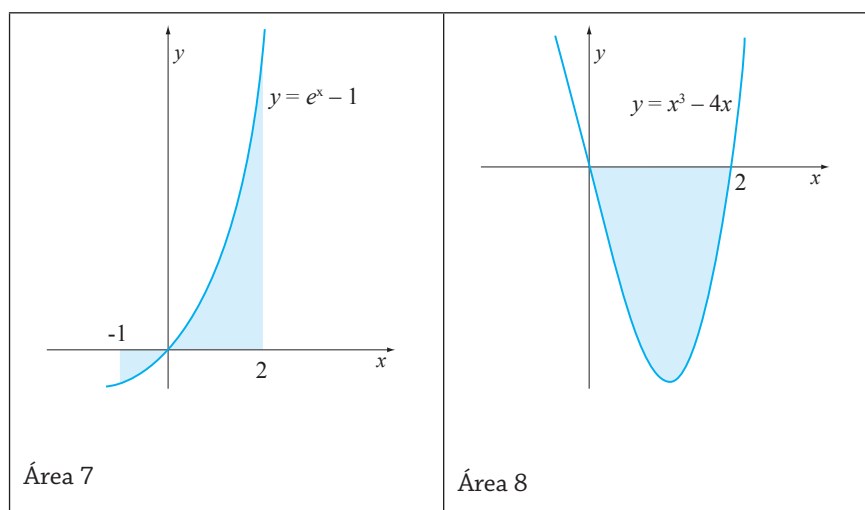
Seja f contínua em $[a,b]$ e $c \in (a,b)$. Então,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 99 30/03/2011 07:43:54

4) EXERCÍCIOS

4.1 Usando *Integral Definida*, calcule as áreas das regiões hachuradas em cada uma das figuras a seguir.

Introd_calc_Integral_2011.indd 100 30/03/2011 07:43:55

4.2 Faça um esboço das regiões delimitadas pelas curvas dadas a seguir. Em cada caso, calcule o valor da área da região.

(a) $y = x$, $y = -x^2 + 2$

(b) $y = e^x$, $y = sen x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $y = x^2 - x$, $y = -x^2 + 1$

(d) $y = cos\, x$, $y = 2 - cos\, x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

(e) $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$

(f) $y = x + 1$, $y = \dfrac{1}{x-1}$

4.3 Seria possível interpretar o valor da integral $\int_1^2 \dfrac{2x^3}{x^2-4}dx$ como a área entre a curva $y = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$ e o eixo x, entre as retas $x = 1$ e $x = 2$?

Justifique sua resposta. Se ela for positiva, calcule o valor da área mencionada. Caso seja negativa, dê as indicações necessárias para que seja obtida a área mencionada.

5) REFERÊNCIAS

STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 2001. v. 1.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books.

Introd_calc_Integral_2011.indd 101 30/03/2011 07:43:55

AULA 9

Aplicações de Integração

OBJETIVO
Utilizar o conceito de integral e os métodos desenvolvidos para solucionar questões postas pela matemática e em outras áreas do conhecimento.

1) INTRODUÇÃO

Encerrando o estudo do Cálculo de Integrais, utilizamos o instrumento desenvolvido para modelar matematicamente fenômenos ou grandezas que desejamos conhecer. Iniciamos com o cálculo da precipitação total de uma substância em uma reação química, seguida de discussões sobre o cálculo de massa e de vazão.

Encerramos a aula descrevendo dois métodos que nos permitem calcular o volume de sólidos de revolução. Retomamos assim ao final uma das questões que permearam o desenvolvimento da área de conhecimento que hoje identificamos como Cálculo: a obtenção de volumes de sólidos, de um modo geral.

2) CÁLCULO DA PRECIPITAÇÃO TOTAL

Numa reação química, uma certa substância está sendo precipitada a uma taxa de y gramas por segundo, onde $y = y(t)$; ou seja, y varia com o tempo t.

Suponha que a reação esteja sendo observada num intervalo de tempo de 10 segundos.

Como calcular a precipitação total da substância, neste intervalo de tempo?

Para usar a matemática, iniciamos denominando o intervalo de tempo de $I = [0,10]$, e observando que a taxa de precipitação $y = y(t)$ é uma função $y : I \to IR$.

Se $y = y(t)$ fosse uma função constante, por exemplo, $y = c gr/seg$, a precipitação total no intervalo de tempo I seria calculada pelo produto da taxa de precipitação $c gr/seg$ pelo tempo de observação, que é 10 *seg*. Ou seja, pelo comprimento do intervalo I. Temos então:

$$c\, gr/seg \times 10\ seg = 10c\, gr.$$

Mas, no caso descrito, a taxa de precipitação não é constante no intervalo em que a experiência está sendo observada! Como proceder?

Ideia:

Podemos pensar num valor "médio" c_0 para $y = y(t)$ em I, e estimar a precipitação total[1] como aproximadamente $c_0\, gr/seg \times 10\ seg = 10c_0\, gr$.

Buscando melhorar a estimativa, uma proposta pode ser a de dividir o intervalo I em dois subintervalos $I_1 = [0,5]$ e $I_2 = [5,10]$, estimando a precipitação total como $(c_1 \times 5) + (c_2 \times 5)$, onde

C_1 é um valor "médio" da taxa de precipitação em I_1,

C_2 é um valor "médio" da taxa de precipitação em I_2.

Procedendo assim, a estimativa para a precipitação total provavelmente estará melhor.

Para melhorar ainda mais o processo, podemos dividir o intervalo I em n intervalos, de comprimentos iguais a $\frac{10}{n}$. Veja a figura a seguir:

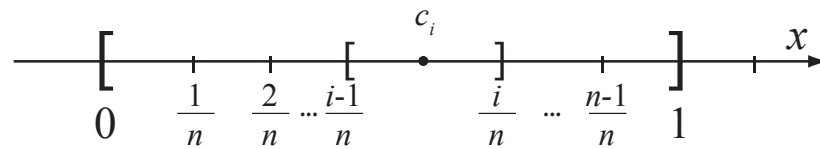



Figura 1: decomposição de $I = [0,10]$ em n subintervalos

A precipitação total pode ser estimada como valendo

$$\left(c_1 \times \frac{10}{n}\right) + \left(c_2 \times \frac{10}{n}\right) + \ldots + \left(c_i \times \frac{10}{n}\right) + \ldots + \left(c_n \times \frac{10}{n}\right),$$

onde

C_1 é um valor "médio" da precipitação em $I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right]$,

C_2 é um valor "médio" da precipitação em $I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, etc... e, em geral,

C_i é um valor "médio" da precipitação em $I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$.

[1] Por exemplo, para $y = y(t) = t^2$, e estipulando como "valor médio" $c_0 = y(6) = 36 gr/seg$, estimamos a precipitação como $36 \times 10 = 360 gr$. Não se esqueça de que este é um valor *aproximado* para a precipitação!

Introd_calc_Integral_2011.indd 104 30/03/2011 07:43:56

Lembrando que $y = y(t)$ é a taxa de precipitação, podemos escrever $c_i = y(t_i)$.

Na notação de somatório, a precipitação total vale, aproximadamente,[2]

$$\left(c_1 \times \frac{10}{n}\right) + \left(c_2 \times \frac{10}{n}\right) + \ldots + \left(c_i \times \frac{10}{n}\right) + \ldots + \left(c_n \times \frac{10}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i \times \frac{10}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y(t_i) \times \frac{10}{n}\right).$$

Se o resultado das somatórias estabilizarem em algum valor numérico P para valores de n cada vez maiores, fica razoável dizermos que P é a precipitação total.

Em linguagem matemática, dizemos que $P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n}\left(y(t_i) \times \frac{10}{n}\right)$, caso este limite exista.

Ainda, escrevendo $\frac{10}{n} = \Delta t$ e retomando a definição de *Soma de Riemann* e *Integral Definida*, temos

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n}\left(y(t_i) \times \frac{10}{n}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} y(t_i)\Delta t = \int_0^{10} y(t)dt.$$

2.1 Exemplo: reação química com taxa de precipitação $y = (t-1)^6$ *gr/seg*

Numa reação química, uma certa substância está sendo precipitada a uma taxa de y gramas por segundo, onde $y = (t-1)^6$; ou seja, y varia com o tempo t.

No caso de a reação estar sendo observada num intervalo de tempo de cinco segundos, como calcular a precipitação total da substância, neste intervalo de tempo?

Da discussão anterior, o valor da precipitação total P é $\int_0^5 (t-1)^6 dt$.

Fazendo $u = (t-1)$, temos $du = dt$ e

$$\int (t-1)^6 dt = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{(t-1)^7}{7} + C.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$P = \int_0^5 (t-1)^6 dt = \left(\frac{(t-1)^7}{7}\right)_0^5 = \frac{(5-1)^7}{7} - \frac{(0-1)^7}{7} = \frac{4^7+1}{7} gr.$$

3) CÁLCULO DE MASSA DE UMA HASTE

Suponha que uma haste[3] de comprimento L tenha densidade variável δ.

Num ponto qualquer x da haste, a densidade linear é $\delta(x)$ gramas por centímetro.

Como calcular a massa total da haste?

[2] Lembre-se de que, mesmo que x seja um número muito grande, o valor calculado com essa soma finita será sempre um valor aproximado para a precipitação total.

[3] Pense nessa haste identificada com o intervalo $[0.L]$ da reta. Faça um esboço!

Se a densidade δ fosse constante, a massa M, em gramas, seria

valor da densidade (gramas por centímetro) $\times$ *comprimento da haste* (centímetro)

Em linguagem matemática,

$M = \delta \times L$.

Mas, no caso em estudo, a densidade é variável ao longo da haste!

Ideia:

Procedendo como no exemplo anterior, podemos decompor o intervalo $[0, L]$ em pequenos subintervalos de comprimento Δx. A proposta é considerar $y = \delta(x)$ constante em cada subintervalo I_i da decomposição. Tomamos essa constante como $\delta(c_i)$, para $c_i \in I_i$, e escrevemos[4]

$$\Delta M_i = \delta(c_i)\Delta x .$$

A massa M da haste é estimada como

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i = \sum_{i=1}^{n} \delta(c_i)\Delta x.$$

Argumentos como os do exercício anterior nos levam a expressar

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \delta(c_i)\Delta x .$$

Da definição de integral, escrevemos

$$M = \int_0^L \delta(x)\,dx.$$

3.1 Exemplo: haste com densidade linear $\delta(x) = e^{-3x}$ e comprimento 1

Se $\delta(x) = e^{-3x}$ e a haste tem comprimento 1, então sua massa M pode ser encontrada resolvendo a *Integral Definida* $\int_0^1 e^{-3x}dx$.

Calculando $\int e^{-3x}dx$:

Faça $u = -3x$. Segue que $du = -3dx$ e

$$\int e^{-3x}dx = \int e^{u}.(-3)du = -3e^{u} + C = -3e^{-3x} + C .$$

Daí, a *Integral Definida* é calculada como

$$\int_0^1 e^{-3x}dx = \left(-3e^{-3x}\right)\Big|_0^1 = -3e^{-3} + 3 .$$

Assim, a massa M é $3\left(1 - e^{-3}\right)$ unidades de massa.

[4] ΔM_i é chamado *elemento de massa* da decomposição.

Introd_calc_Integral_2011.indd 106 30/03/2011 07:43:58

4) CÁLCULO DE VAZÃO TOTAL

Como calcular a vazão total de um escoamento de água através de um tubo, a uma taxa variável?

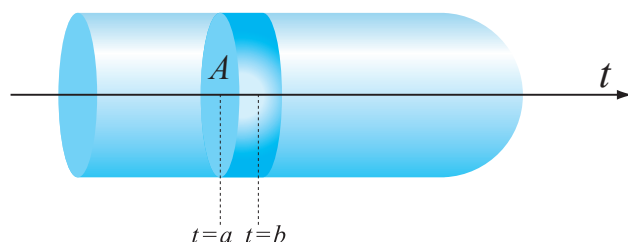



Figura 2: vazão de água em um tubo cilíndrico

Veja a Figura 2. Este tubo é representado como um cilindro, e um ponto A está assinalado no desenho. A vazão (taxa de escoamento) neste ponto A, no instante t, está representada por $y = f(t)$.

A intenção aqui é a de estudar como obter a *vazão total*, ou seja, o volume total de fluido passando por A, do instante $t = a$ até $t = b$.

Se a taxa de escoamento fosse constante, digamos, *cml/seg*, a vazão total seria:

Taxa de escoamento em *ml/seg* $\times$ tempo de escoamento em *seg*.

Em linguagem matemática,

$$c\ ml/seg \times (b-a)\ seg.$$

Mas, na situação descrita, em que a taxa de escoamento é $y = f(t)$, uma ideia que pode funcionar será a de escrevermos a expressão do *elemento de vazão* ΔV_i, relacionada a uma decomposição do intervalo de tempo $[a,b]$

$$\Delta V_i = f(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Como nos dois exemplos anteriores, temos que, em termos do conceito de integral, a vazão se escreve:

$$V = \int_a^b f(t)\,dt.$$

4.1 Exemplo: taxa de escoamento linearmente crescente

Num escoamento de água através de um tubo, a água flui a uma taxa linearmente crescente. Observou-se que esta é de 10 m^3/seg às 8 horas, e 12 m^3/seg às 14 horas. Quanta água passou pelo ponto de observação neste intervalo de tempo?

Faça um esboço representando a vazão. Verifique que a integral que representa o volume que você quer calcular corresponde à soma da

Introd_calc_Integral_2011.indd 107 30/03/2011 07:43:58

área de um retângulo e um triângulo. Estes últimos valores você pode calcular usando fórmulas que são suas conhecidas.

5) CÁLCULO DE VOLUMES DE REVOLUÇÃO

5.1 O método dos discos

Veja o desenho na Figura 3 e considere o giro da região R limitada pelo gráfico da função f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A Figura 4 representa o sólido resultante da rotação da região.

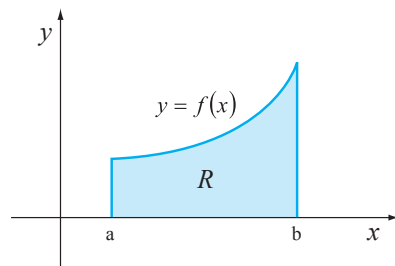



Figura 3: região R

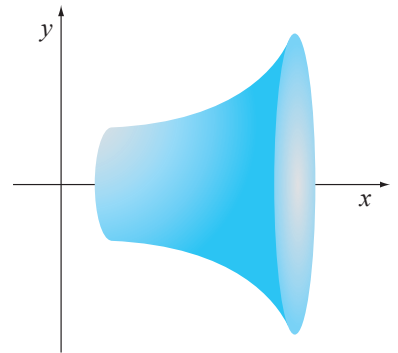



Figura 4: sólido gerado pela rotação de R

Para calcular o volume deste sólido, decompomos a região R em retângulos R_i de largura Δx e altura $f(c_i)$, onde c_i é um ponto na base de R_i.

Confira o que queremos dizer, na Figura 5. Confira, também, na Figura 6, que a rotação deste retângulo R_i ao redor do eixo x descreve um cilindro circular reto com raio da base $f(c_i)$ e altura Δx.

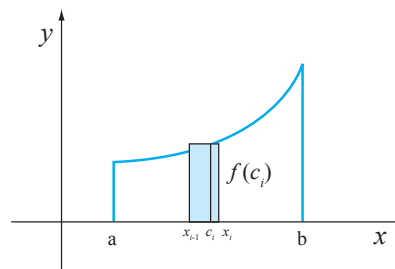



Figura 5: decomposição em retângulos R_i

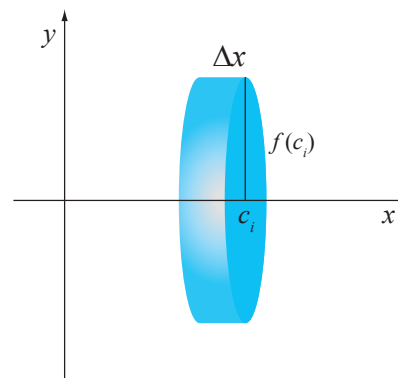



Figura 6: rotação do retângulo R_i

Introd_calc_Integral_2011.indd 108 30/03/2011 07:43:59

O volume ΔV_i deste cilindro será

$$\Delta V_i = \pi\left[f(c_i)\right]^2 \Delta x = \pi f^2(c_i)\Delta x .$$

O volume desejado do sólido de revolução pode ser aproximado por

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x .$$

Para o cálculo do volume V, uma proposta pode ser fazer a quantidade de cilindros da decomposição tender ao infinito, ou, em outras palavras, fazer a base dos cilindros da decomposição tender a zero, analisando se os valores de $\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x$ se estabilizam. Em linguagem matemática, este processo corresponde a verificar se existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x .$$

Relembrando a definição de *Soma de Riemann*, escrevemos

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x = \int_a^b \pi f^2(x)dx .$$

5.1.1 Exemplo: o volume da bola de raio r

Podemos pensar em uma bola como a rotação de um arco de círculo em torno de um eixo, como na Figura 7.

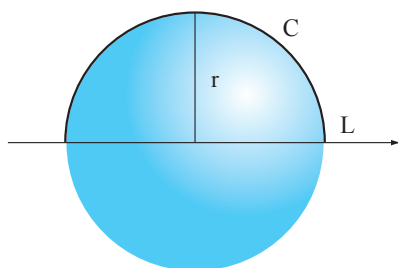



Figura 7: arco C do círculo de raio r

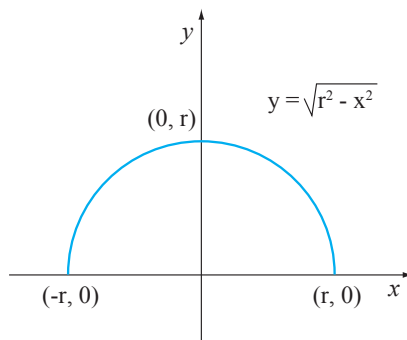



Figura 8: o gráfico de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Para escrevermos o problema em matemática, e usarmos a *Integral Definida*, tomamos um sistema de coordenadas no plano e identificamos sua origem com o centro da bola, e o eixo x, com o eixo de revolução do arco.

Neste sistema de coordenadas, o arco corresponde ao gráfico de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, como na Figura 8.

Introd_calc_Integral_2011.indd 109 30/03/2011 07:43:59

Assim, o volume da bola será dado por

$$V=\int_{-r}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx.$$

Resolvendo,

$$V=\int_{-r}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=$$

$$=\pi\left[\left(r^2.r-\frac{r^3}{3}\right)-\left(r^2.(-r)-\frac{(-r)^3}{3}\right)\right]$$

Assim, $V=\frac{2}{3}\pi r^3$.

5.1.2 Exemplo: o volume do sólido gerado pela rotação de $y = x^3$ em torno do eixo x

A Figura 9 representa a região R limitada por $y = x^3$, $x = 0$ e $y = 1$. Na Figura 10, o sólido gerado pela sua rotação em torno do eixo x.

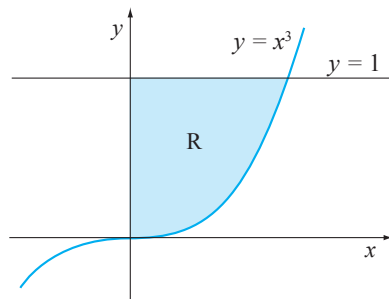



Figura 9: região R limitada por $y = x^3$, $x = 0$ e $y = 1$

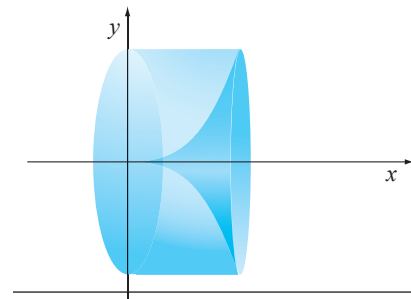



Figura 10: sólido gerado pela rotação de R

Observe que podemos calcular seu volume como a diferença entre o volume V_1 do cilindro de raio da base igual a 1 e altura 1, e o volume V_2 do sólido gerado pela rotação da região da Figura 9 em torno do eixo x.

Veja os sólidos de volume V_1 e V_2 nas Figuras 11 e 12, respectivamente.

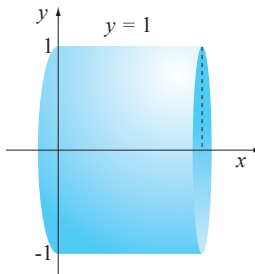



Figura 11: sólido de volume V_1

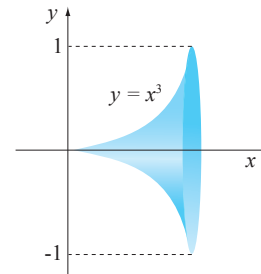



Figura 12: sólido de volume V_2

Para calcular V_1, use a fórmula de volume de cilindro, já conhecida: $V_1 = \pi.(1)^2.1 = \pi$.

Para V_2, escrevemos

$$V_2 = \int_0^1 \pi\left(x^3\right)^2 dx = \pi \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \pi\frac{1}{7}.$$

O volume procurado será $V = V_1 - V_2 = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$.

5.1.3 Exemplo: o volume do sólido gerado pela rotação de $y = x3$ em torno do eixo y

A proposta aqui é a de rotacionar a mesma região do exemplo 5.1.2 em torno do eixo y. Observe a região e sua rotação, na Figura 13.

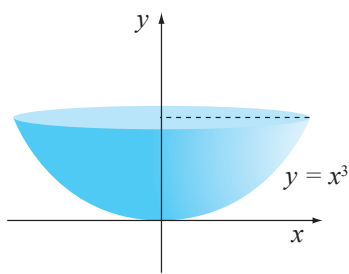



Figura 13: rotação de $y = x^3$ em torno do eixo y

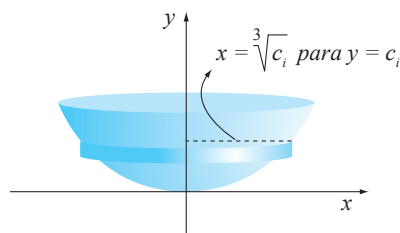



Figura 14: decomposição do sólido em elementos de volume

A Figura 14 sugere a decomposição do sólido em elementos de volume que podem ser escritos como

$\Delta V_i = \pi\left(\sqrt[3]{c_i}\right)^2 dy$. Isso nos leva a definir

$$V = \int_0^1 \pi y^{\frac{2}{3}} dy.$$

Calculando a integral,

$$V = \left.\left(\pi\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{5}\pi.$$

5.2 O método das cascas

A Figura 15 representa uma região R a ser rotacionada em torno do eixo y. A proposta é subdividi-la em retângulos R_i como no desenho, e obter seu volume V como soma dos elementos de volume ΔV_i como descrito na Figura 16.

Introd_calc_Integral_2011.indd 111 30/03/2011 07:44:00

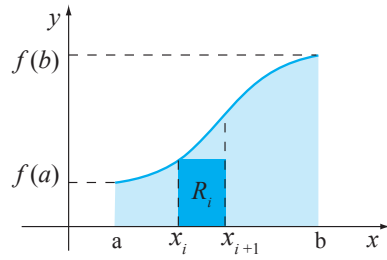
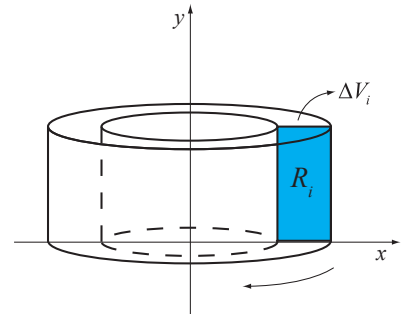



Figura 15 Figura 16

Formalizando um pouco mais a proposta, a ideia é a de dividir o intervalo $[a,b]$ em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, correspondentes a uma partição da forma

$$a = x_0,\ _1,\dots,x_n = b.$$

Para um retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(c_i)$, onde c_i é um ponto em $[x_{i-1}, x_i]$, sua revolução gera uma arruela de raio externo x_i e raio interno x_{i-1}, altura e espessura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Veja na Figura 17.

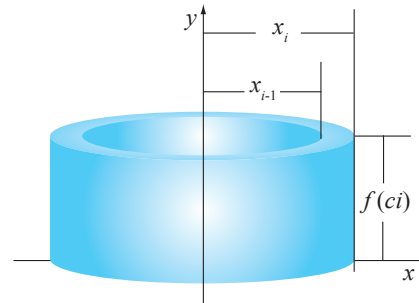



Figura 17: arruela de raio externo x_i e raio interno x_{i-1}, altura $f(c_i)$ e espessura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Se consideramos c_i como o ponto médio entre x_{i-1} e x_i, obtemos para volume da arruela

$$\begin{aligned}
\Delta V_i &= \pi x_i^2 f(c_i) - \pi x_{i-1}^2 f(c_i) = \pi f(c_i)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\
&= \pi f(c_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\
&= \pi f(c_i) 2 \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} . \Delta x \\
&= 2\pi f(c_i) c_i \Delta x
\end{aligned}$$

A soma total dos volumes das arruelas será $\sum_{=1}^{n} 2\pi f(c_i) c_i \Delta x$. O volume do sólido de revolução será dado pelo limite desta soma, quando $n \to +\infty$ (ou quando $\Delta x \to 0$). Escrevendo em termos de integrais,

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 112 30/03/2011 07:44:01

5.2.1 Exemplo: calcular volume pelo método das cascas

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região $y = -x^2 + 5x$, $y = 2x$ e $y = 0$, em torno do eixo y.

A Figura 18 representa a região a ser rotacionada.

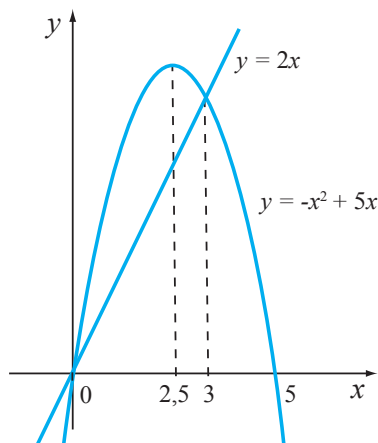



Figura 18: rotação da região $y = -x^2 + 5x$, $y = 2x$ e $y = 0$, em torno do eixo

Veja que vamos ter que dividir o volume V em dois volumes, V_1 e V_2. Isso porque os elementos de volume são gerados pela expressão

$\Delta V = 2\pi x.2xdx$, para $x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$ e

$\Delta V = 2\pi x.\left(-x^2 + 5x\right)dx$, para $x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right]$.

Assim, $V = \int_0^{\frac{5}{2}} 4\pi x^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^{5} 2\pi\left(-x^3 + 5x^2\right)dx$.

Resolvendo,

$$V = \left(4\pi \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{5}{2}} + \left(2\pi\left(-\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3}\right)\right)\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{5} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 2\pi\left[-\frac{225}{4} + \frac{225}{3} - \left(-\frac{225}{4^3} + \frac{225}{4.6}\right)\right].$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 113 30/03/2011 07:44:01

6) EXERCÍCIOS

6.1 Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$, em torno do eixo y.

6.2 Calcule o volume do sólido gerado por $y = \sqrt{x}$, $x = 1$ e $y = 0$, em torno do eixo x.

6.3 Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x da região delimitada por $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

6.4 A região limitada pelo gráfico de $y = senx$ $f(x) = sen(x)$, $x \in [0, \pi]$ e pelo eixo x é girada ao redor do eixo y. Calcule o volume do sólido assim obtido.

6.5 Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto, rotacionando o segmento de reta de $(0, b)$ a (a, h) em torno do eixo x. (Faça um esboço.)

6.6 A *razão* ou *taxa de variação* segundo a qual qualquer unidade usando eletricidade consome energia é em geral chamada potência P, normalmente medida em watts ou kilowatts.

Para uma dada unidade, supor conhecida a função $P = P(t)$, onde t é o tempo.

Tipicamente $P(t)$ "salta" cada vez que um interruptor é acionado; $P(t)$ pode ser pensada como contínua em determinados intervalos de tempo. Num pequeno intervalo de tempo (e de continuidade de P), a energia consumida é aproximadamente $P(c)$, onde

$$t < c < t \;\; e = t - t.$$

(a) Justifique brevemente como você poderá obter a energia total consumida por meio de integração, num intervalo de tempo $a < t < b$.

(b) Supondo que o gráfico a seguir represente a razão de consumo de energia de um motor em um determinado dia, qual é a energia consumida? Justifique brevemente.

6.7 Através de um tubo flui água a uma taxa linearmente crescente, que se observou ser de 10 m^3/seg às 8 horas e de 12 m^3/seg às 14 horas do mesmo dia. Quanta água passou pelo ponto de observação neste intervalo de tempo? Faca um esboço!

7) REFERÊNCIAS

PINTO, M. *Terceiro trabalho de cálculo I*. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 1998. Trabalho Técnico não publicado.

Site de Cálculo em www.mat.ufmg.br.

AULA 10

Integrais Impróprias

OBJETIVOS
Estender o conceito de *Integral Definida*, apresentando, caracterizando e calculando *Integrais Impróprias*.

1) INTRODUÇÃO

Nas duas últimas aulas utilizamos o conceito de integral para calcular áreas entre curvas e volumes, resolvendo problemas postos pela matemática e por outras ciências. Saber utilizar um conceito matemático em contextos diversos é parte indissociável de seu aprendizado.

Nesta aula, que encerra nosso curso, vamos estender um conceito estudado, que é nosso conhecido, para contemplar situações que não estavam previstas inicialmente em sua definição. Este é um processo comum na construção do conhecimento matemático.

Aqui, vamos romper com algumas limitações impostas na definição de *Integral Definida*, definindo as *Integrais Impróprias*.

Dizemos que uma *Integral Definida* é *Imprópria* quando o intervalo de integração é ilimitado e/ou o integrando é uma função ilimitada no intervalo de integração (por exemplo, quando o seu gráfico possui uma assíntota vertical em um ponto interior ou extremo do intervalo de integração).

A notação utilizada para representar uma *Integral Imprópria* é a padrão. No primeiro caso, isto é, quando o intervalo de integração é ilimitado, ela é naturalmente clara, como mostram as seguintes situações:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

No segundo caso, ou seja, quando o integrando $f(x)$ se torna ilimitado no intervalo (a,b), ainda denotamos a *Integral Imprópria* por $\int_a^b f(x)dx$.

Assim, neste caso, não é claro a partir da notação se a integral é imprópria ou não. A "impropriedade" da integral, isto é, o(s) ponto(s) do intervalo (a,b) em que $f(x)$ se torna ilimitada não aparece(m) na notação. É necessário que tenhamos o conhecimento prévio do comportamento de $f(x)$ nesse intervalo para que classifiquemos a integral como imprópria.

Obviamente, uma integral pode ser imprópria por se enquadrar em ambos os casos: intervalo de integração e integrando infinitos.

Antes de discutirmos como calcular *Integrais Impróprias*, vejamos alguns exemplos de tais integrais.

1.1 Exemplo

As seguintes integrais são impróprias, porque seus intervalos de integração são infinitos: $\int_2^{\infty} e^{-x}dx$, $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

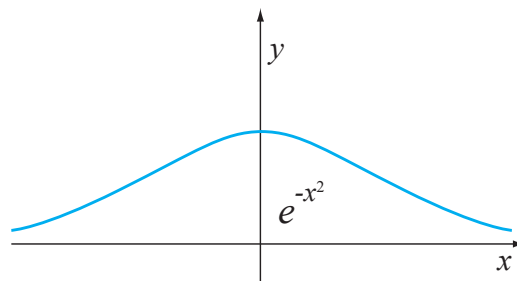



Figura 1: a integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ é imprópria porque o intervalo de integração, $(-\infty,\infty)$, é ilimitado

1.2 Exemplo

Já as integrais $\int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2}dx$ e $\int_1^4 ln(x-1)dx$ são impróprias porque os integrandos se tornam ilimitados no intervalo de integração (mesmo que tais intervalos sejam limitados).

De fato, a função $\frac{1}{x^2}$ é ilimitada quando x se aproxima de 0 pela esquerda desse ponto, pois $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 116 30/03/2011 07:44:02

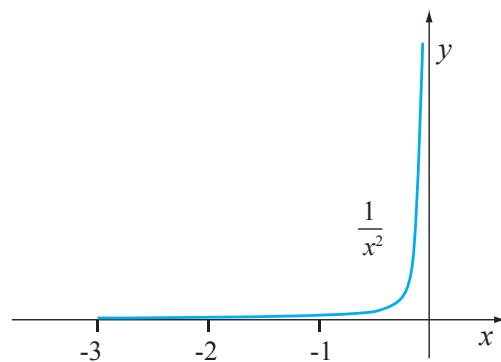



Figura 2: a integral $\int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2} dx$ é imprópria porque $\frac{1}{x^2}$ é ilimitada quando $x \to 0^-$

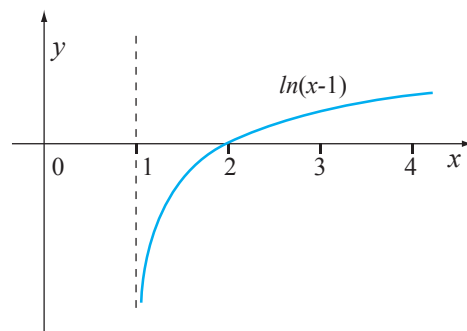



Figura 3: a integral $\int_{1}^{4} ln(x-1)dx$ é imprópria porque $ln(x-1)$ é ilimitada quando $x \to 1^+$

O mesmo fato ocorre com a função $ln(x-1)$ quando x se aproxima de 1^+, pois $\lim_{x \to 1^+} ln(x-1) = -\infty$.

1.3 Exemplo

As integrais $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} dx$, $\int_{-2}^{\infty} ln|x|\,dx$ e $\int_{1}^{\infty} x^3 dx$ são impróprias pelos dois motivos: seus intervalos de integração são ilimitados e seus integrandos são ilimitados nos respectivos intervalos. Observe que $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \to \infty} ln|x| = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$. Além disso, o integrando da segunda integral se torna ilimitado no ponto $x = 0$ que pertence ao interior do intervalo de integração $(-2,\infty)$. De fato, temos $\lim_{x \to 0^-} ln|x| = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} ln|x| = -\infty$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 117 30/03/2011 07:44:02

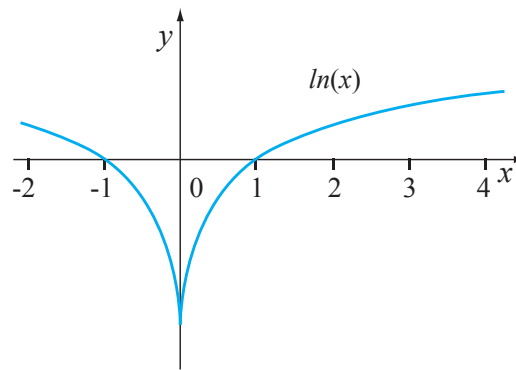



Figura 4: a integral $\int_{-2}^{\infty} ln\,|\,x\,|\,dx$ é imprópria porque $ln\,|\,x\,|$ é ilimitada quando $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ (pois $\lim_{x\to 0^-} ln\,|\,x\,| = \lim_{x\to 0^+} ln\,|\,x\,| - \infty$) e porque o intervalo de integração $\left[-2,\infty\right)$ é ilimitado

2) O CÁLCULO DA *INTEGRAL IMPRÓPRIA*

O processo utilizado para se calcular uma *Integral Imprópria* está associado à forma de sua(s) impropriedade(s) e emprega o conceito de limite de uma função. A seguir apresentamos, caso a caso, tal processo, descrevendo-o e ilustrando-o.

2.1 Intervalo de integração ilimitado

Neste caso, temos três possibilidades para *Integrais Impróprias*. Elas estão listadas a seguir, cada qual com a forma utilizada (por definição) para o seu cálculo:

(a) $\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$, em que c é qualquer número real fixado.

Se algum dos limites acima não existir ou for ilimitado (isto é, seu resultado for $\pm\infty$), então dizemos que a *Integral Imprópria* correspondente é *divergente*. Caso contrário, dizemos que a *Integral Imprópria* é *convergente*, e o seu valor é o limite nos itens (a) e (b) e o resultado da soma dos limites no item (c).

No caso (a), em que o intervalo de integração é $\left[-2,\infty\right)$, calculamos, primeiramente, a integral $\int_a^b f(x)dx$, em que b é qualquer número tal que $b > a$. Dessa forma, obtemos uma função de b, da qual extraímos

Introd_calc_Integral_2011.indd 118 30/03/2011 07:44:03

o limite quando $b \to \infty$. Se o limite não existir ou o seu resultado for $-\infty$ ou ∞, então escrevemos simplesmente que a *Integral Imprópria* diverge. Caso contrário, a *Integral Imprópria* será convergente, e o seu valor será o valor calculado do limite.

A título de ilustração para o caso (a), calculemos a integral $\int_2^\infty xe^{-x^2}dx$:[1]

$$\int_2^\infty xe^{-x2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-x2}}{2}\Bigg|_2^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-b2}}{2}+\frac{e^{-4}}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}+\frac{e^{-4}}{2}\right) = \frac{e^{-4}}{4}.$$

Concluímos deste cálculo que $\int_2^\infty xe^{-x^2}dx$ é convergente, e o seu valor é $\frac{e^{-4}}{4}$.

O processo é análogo no caso (b), em que o intervalo de integração é $[-\infty, b)$. Primeiro, calculamos a integral $\int_a^b f(x)dx$, em que a é qualquer número tal que $a < b$. A expressão resultante deste cálculo é uma função da variável a, cujo limite, quando $a \to -\infty$, é o valor que atribuímos à *Integral Imprópria* $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, caso este limite exista (seja um número real). Nessa situação, a *Integral Imprópria* é convergente. Se o limite não existir ou for infinito (entenda-se $-\infty$ ou ∞), a integral será divergente.

Para exemplificar o caso (b), calculemos a integral $\int_{-\infty}^2 xe^{-x^2}dx$:[1]

$$\int_{-\infty}^2 xe^{-x2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^2 xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-e^{-x2}}{2}\Bigg|_a^2\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-e^{-4}}{2}+\frac{e^{-a^2}}{2}\right) = \left(\frac{-e^{-4}}{2}+\frac{0}{2}\right) = -\frac{e^{-4}}{4}.$$

Assim, também concluímos que $\int_{-\infty}^2 xe^{-x^2}dx$ é convergente. O seu valor é $-\frac{e^{-4}}{4}$.

O caso (c), em que o intervalo de integração é $(-\infty, \infty)$, é uma combinação dos casos anteriores. Escolhemos um valor c qualquer e calculamos a *Integral Imprópria* $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, escrevendo-a como a soma de duas integrais: $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$. Observe que isso significa calcular duas *Integrais Impróprias*, uma relativa ao caso (b), e a outra, ao caso (a).

É possível verificar que o resultado desse procedimento é sempre o mesmo, qualquer que seja a escolha de c.

[1] Observe que, utilizando a substituição $u = -x^2$, temos $du = -2xdx$ e $\int xe^{-x^2}dx = \int \frac{e^u}{-2}du = -\frac{e^u}{2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}$.

Introd_calc_Integral_2011.indd 119 30/03/2011 07:44:04

Aproveitando os dois exemplos anteriores, podemos dizer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{2} xe^{-x^2}dx + \int_{2}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \left(-\frac{e^{-4}}{2}\right) + \left(\frac{e^{-4}}{2}\right) = 0,$$

e que, portanto, $\int_{\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$ é convergente (pois esta integral é a soma de duas integrais convergentes). Podemos enfatizar essas conclusões dizendo que a integral converge para 0.

A fim de ilustrarmos que o resultado não depende da escolha do ponto intermediário c, vamos escolher outro valor para este ponto. Por exemplo, para $c = -3$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x2}dx = \int_{-\infty}^{-3} xe^{-x2}dx + \int_{-3}^{\infty} xe^{-x2}dx = \left(\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-3} xe^{-x2}dx\right) + \left(\lim_{b\to\infty}\int_{-3}^{b} xe^{-x2}dx\right).$$

Calculando a primeira *Integral Imprópria*, obtemos

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-3} xe^{-x2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-e^{-x2}}{2}\Bigg|_{a}^{-3}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-e^{-9}}{2} + \frac{e^{-a^2}}{2}\right) = \left(\frac{-e^{-9}}{2} + \frac{0}{2}\right) = -\frac{e^{-9}}{4}.$$

Agora, calculando a segunda integral, encontramos

$$\int_{-3}^{\infty} xe^{-x2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-3}^{b} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-x2}}{2}\Bigg|_{-3}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-b2}}{2} + \frac{e^{-9}}{2}\right) = \left(\frac{0}{2} + \frac{e^{-9}}{2}\right) = \frac{e^{-9}}{4}.$$

Assim, $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x2}dx = \int_{-\infty}^{-3} xe^{-x2}dx + \int_{-3}^{\infty} xe^{-x2}dx = \left(-\frac{e^{-9}}{2}\right) + \left(\frac{e^{-9}}{2}\right) = 0,$

conforme esperávamos.

Nota: Uma *Integral Imprópria* do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ não deve ser calculada por meio do limite: $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ Este procedimento somente funciona em situações especiais, como a do último exemplo, em que o integrando é uma função ímpar e as *Integrais Impróprias* $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ e $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ existem (isto é, os limites correspondentes são números reais) qualquer que seja c. Numa situação destas, temos $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ para qualquer valor de a, exatamente devido à propriedade de $f(x)$ ser ímpar.

Entretanto, nem sempre isso funciona. Por exemplo, se calculássemos a

Introd_calc_Integral_2011.indd 120 30/03/2011 07:44:05

integral $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ por esse processo (incorreto), encontraríamos $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$, uma vez que $f(x) = x$ é uma função ímpar. Porém, $\int_{\infty}^{\infty} xdx$ é divergente. De fato, escolhendo $c = 0$ como ponto intermediário, temos

$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{\infty} xdx$. Como pelo menos uma das *Integrais Impróprias*

$\int_{-\infty}^{0} xdx$ e $\int_{0}^{\infty} xdx$ é divergente,[2] o mesmo ocorre com a integral $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$.

Exemplo 2.1.1

Neste exemplo vamos analisar a convergência da integral $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ em relação ao parâmetro p. Para $p = 1$, a integral é divergente, pois

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(ln(b) - ln(1) \right) = \lim_{b \to \infty} ln(b) = \infty .$$

Agora, se $p \neq 1$, temos

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to \infty} \left(\left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_{1}^{b} \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \infty & se \quad p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & se \quad p > 1 \end{cases},$$

pois $\lim_{b \to \infty} b^{1-p} = \begin{cases} \infty & se \quad p < 1 \\ 0 & se \quad p > 1 \end{cases}$.

Concluímos que a integral $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ é divergente se $p \leq 1$, e convergente (para o valor $\frac{1}{p-1}$) se $p > 1$.

2.2 Integrando ilimitado

Neste caso, calculamos a *Integral Imprópria* por um processo limite determinado pelo(s) ponto(s) onde o integrando se torna ilimitado. Por exemplo, se $f(x)$ se torna ilimitada quando $x \to a^+$ e é contínua no intervalo $(a, b]$, então definimos

$$\int_{a}^{b} f(x) dx := \lim_{c \to a^+} \int_{c}^{b} f(x) dx$$

e, caso o limite exista (como um número real), dizemos que a integral

[2] Na realidade, ambas são divergentes:

$$\int_{0}^{\infty} xdx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} xdx = \lim_{b \to \infty} \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_{0}^{b} \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \lim_{b \to \infty} \frac{b^2}{2} = \infty$$

e, analogamente,

$$\int_{-\infty}^{0} xdx = -\infty .$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 121 30/03/2011 07:44:06

$\int_a^b f(x)dx$ é convergente, e seu valor é o valor do limite $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$.

Caso contrário, se o limite não existir ou for ilimitado, isto é, $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx = -\infty$ ou $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx = \infty$, então dizemos que a integral

$\int_a^b f(x)dx$ é divergente (ou que diverge).

Em outra situação, se $f(x)$ se torna ilimitada quando $x \to b^-$ e é contínua no intervalo $[a,b)$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

e dizemos que a integral $\int_a^b f(x)dx$ é convergente se o limite existir (como um número real), e que é divergente em caso contrário (isto é, se o limite não existir ou for $\pm\infty$).

A título de ilustração, calculemos $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}dx$. Antes, notemos que a função $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ é contínua no intervalo $(0,1]$ e que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+} ln(x)\right) = \infty\times(-\infty) = -\infty$.

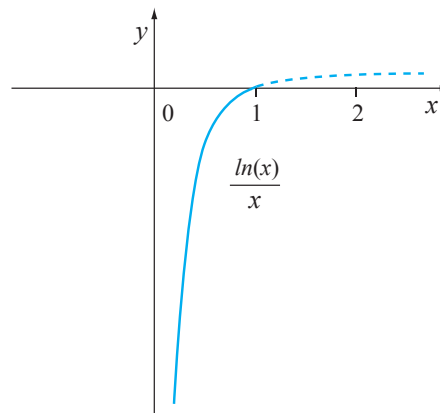



Figura 5: o gráfico de $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ para x no intervalo $[0,1]$

Introd_calc_Integral_2011.indd 122 30/03/2011 07:44:07

Portanto, a integral é imprópria e

$$\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{ln(x)}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{ln^2(x)}{2}\Bigg|_c^1\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{ln^2(1)}{2} - \frac{ln^2(c)}{2}\right) = -\lim_{c\to 0^+}\frac{ln^2(c)}{2} = -\infty.$$ [3]

Assim, concluímos que a *Integral Imprópria* é divergente. (Podemos dizer que esta integral diverge para $-\infty$.) Observando o gráfico do integrando $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$, interpretamos que a *Integral Imprópria* $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}dx = -A(D)$, em que $A(D)$ é a área da região D compreendida entre o gráfico de $\frac{ln(x)}{x}$ e o eixo das abscissas para $0 < x \le 1$. Concluímos que essa área é infinita.

Por fim, ainda temos a situação na qual o integrando $f(x)$ se torna infinito em um ponto c interior ao intervalo de integração $[a,b]$. Nesse caso, definimos

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

e dizemos que a *Integral Imprópria* $\int_a^b f(x)dx$ é:

- convergente, se ambas as *Integrais Impróprias* $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ são convergentes; e
- divergente, se alguma das *Integrais Impróprias* $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ é divergente.

Calculemos como exemplo dessa situação a *Integral Imprópria* $\int_{-4}^9 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$.

Essa integral é imprópria porque $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

[3] Note que fazendo $u = ln(x)$ obtemos $du = \frac{1}{x}dx$ e, daí,

$$\int \frac{ln(x)}{x}dx = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{ln^2(x)}{2}.$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 123 30/03/2011 07:44:07

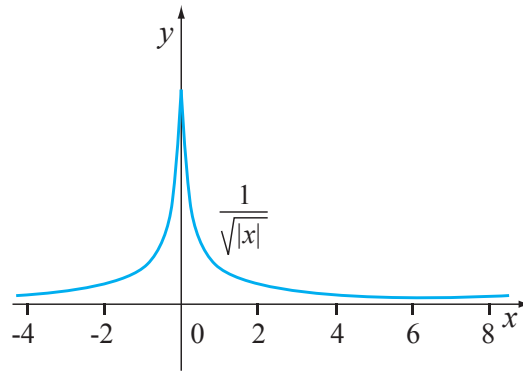



Figura 6: o gráfico de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ para $x\in[-4,0)\cup(0,9]$

Assim, $\int_{-4}^{9}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx=\int_{-4}^{0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx+\int_{0}^{9}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ e, calculando separadamente essas integrais, encontramos

$$\lim_{b\to 0^-}\int_{-4}^{b}(-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to 0^-}\left(-2\sqrt{-x}\Big|_{-4}^{b}\right)=\lim_{b\to 0^-}\left(-2\sqrt{-b}+2\sqrt{4}\right)=4 \text{ e}$$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{9}x^{\frac{1}{2}}dx=\lim_{a\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\Big|_{a}^{9}\right)=\lim_{a\to 0^+}\left(2\sqrt{9}-2\sqrt{a}\right)=6.$$

Logo, a *Integral Imprópria* $\int_{-4}^{9}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ é convergente, e seu valor é $\int_{-4}^{9}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx=4+6=10$.

A interpretação geométrica, neste exemplo, é que a área abaixo do gráfico de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ e acima do eixo das abscissas, para $x\in[-4,0)\cup(0,9]$, é 10. Além disso, para x no intervalo $[-4,0)$, a área é 4, e para x no intervalo $(0,9]$, a área é 6.

2.3 Intervalo de integração e integrando ilimitados

Nesse caso, a *Integral Imprópria* é uma combinação dos casos tratados nos dois itens anteriores. Por exemplo, se $f(x)$ se torna ilimitada quando $x\to a^+$ e é contínua no intervalo (a,∞), então definimos

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx:=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{\infty}f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_{c}^{b}f(x)dx+\lim_{d\to\infty}\int_{b}^{d}f(x)dx$$

Introd_calc_Integral_2011.indd 124 30/03/2011 07:44:08

para qualquer $b > a$ fixado. A integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ será divergente se alguma das integrais $\int_a^{b} f(x)dx$ ou $\int_b^{\infty} f(x)dx$ for divergente. Por outro lado, se ambas forem convergentes, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ será convergente, e seu valor será a soma dos valores $\int_a^{b} f(x)dx$ e $\int_b^{\infty} f(x)dx$, independentemente do valor b escolhido para o cálculo.

Outras situações são possíveis para uma *Integral Imprópria*, cujo integrando e o intervalo de integração são infinitos. Explicitar tais outras situações apresentando as correspondentes formas de se calcular a *Integral Imprópria* e indicando as definições de convergência e divergência é um exercício que deixamos para o leitor.

3) EXERCÍCIOS

1) Calcule a área *A(D)* da região *D* limitada abaixo pela reta $x = 0$, à esquerda pela reta $y = 0$ e acima pelo gráfico $y = e^{-x}$.

2) Está correto o seguinte cálculo: $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4} dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{(-2)^{-3}}{3} = -\frac{3}{8}$?

Justifique.

3) Calcule a integral $\int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2} dx$ e indique se ela é divergente ou convergente.

4) Calcule a integral $\int_0^{1} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ e indique se ela é divergente ou convergente.

5) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$.

6) Encontre os valores do parâmetro p para os quais a integral $\int_1^{5} \frac{1}{x(ln\, x)^p} dx$ converge.

Introd_calc_Integral_2011.indd 125 30/03/2011 07:44:08